

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2000/2001 9. évfolyam 2. kategória 2. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgálató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left\{ \frac{1}{2^z} \right\} = \frac{1}{16^z} + \frac{1}{32},$$

ahol $\{z\}$ a z valós szám törtrészét jelenti!

2. feladat

Melyek azok az $(x;y)$ egész számokból álló számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:

$$5x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 4y = 5?$$

3. feladat

Az ABC háromszög területe t , beírt körének sugara r . Az A csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_a , a B csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_b , a C csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_c . A beírt kör és a másik három kör közös belső érintője egy-egy kis háromszöget vág le az ABC háromszögből, amelyek területe rendre t_a, t_b, t_c . Igazolja, hogy

$$\frac{t_a}{r_a} + \frac{t_b}{r_b} + \frac{t_c}{r_c} = \frac{t}{r}!$$