Kiss Árpád
Országos Közoktatási
Szolgáltató Intézmény

Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2001–2002-es tanév
második forduló
Haladók – I. kategória
(szakközépiskolai tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2001+2002\cdot 2003\cdot \ldots \cdot 4002$$

osztható 4003-mal!

Megoldás. A második összeadandóban ugyanannyi szorzótényező van, mint az elsőben. 1 pont

A második tényező a következő alakban is felírható:

$$2002.2003\cdot \ldots \cdot 4002=(4003-2001)\cdot (4003-2000)\cdot \ldots \cdot (4003-1).$$ 2 pont

Ha a szorzásokat elvégezzük, akkor az eredményben 2001-tényezős szorzatok összege lesz. 1 pont

Egy kivételével az összes összeadandóban szerepel a 4003 szorzótényezőként, vagyis egy kivételével az összes osztható 4003-mal. 1 pont

Amelyikben nem szerepel, az a következő:

$$(-1)\cdot (-2)\cdot \ldots \cdot (-2001)=(-1)^{2001}\cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2001.$$ 1 pont

Mivel 2001 páratlan szám, ezért az előbbi szorzat éppen „kiesik”, amikor az eredeti összeg első tagját hozzáadjuk, tehát $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2001+2002\cdot 2003\cdot \ldots \cdot 4002$ előáll 4003-mal osztható számok összegeként, vagyis tényleg osztható 4003-mal. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=10$ egyenletet!

Megoldás. Az egyenlet értelmezése: $x\geqslant |y|$. 1 pont

Négyzetre emeléssel, 2-vel való osztás után a

$$\sqrt{x+y}\cdot \sqrt{x-y}=50-x$$

egyenlet adódik, aminek alapján $x\leqslant 50$. 1 pont

Újabb négyzetre emeléssel és rendezéssel az

$$y^2=100(x-25)$$

egyenletet kapjuk. 1 pont

Mivel $y^2 \geqslant 0$, ezért $x \geqslant 25$, így 100 négyzetszám volta miatt $(x-25)$-nek is négyzetszámnak kell lennie. 1 pont

Az $(x-25)$ különbség értéke tehát 0, 1, 4, 9, 16, 25 lehet. 1 pont

Az eseteknek megfelelően a megoldások:

$x-25$	0	1	4	9	16	25
x	25	26	29	34	41	50
y	0	10	20	30	40	50

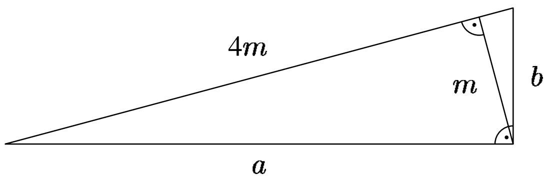
A hat számpár pedig valóban kielégíti az eredeti egyenletet. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A javasolt pontok tovább nem bonthatók.

3. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$ értéke?

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát!



Az ábra jelölései alapján a háromszög kétszeres területére igaz, hogy

$$4m^2 = ab,$$ 1 pont

Pitagorasz tétele szerint $16m^2 = a^2 + b^2$. 1 pont

A két összefüggés megfelelő oldalainak osztásával $4 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ adódik. 1 pont

Ha $\frac{a}{b} = k > 0$, akkor $4 = k + \frac{1}{k}$. Mivel $k^6 + \frac{1}{k^6} = \left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right)^3 - 3\left(k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$, így 1 pont

$$k^6 + \frac{1}{k^6} = \left[\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 2\right]^3 - 3\left[\left(k + \frac{1}{k}\right)^2 - 2\right].$$ 1 pont

Felhasználva, hogy $\left(k + \frac{1}{k}\right)$ értéke 4;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6 = k^6 + \frac{1}{k^6} = (16-2)^3 - 3(16-2) = 14^3 - 3 \cdot 14 = 14 \cdot 193 = 2702.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A javasolt pontok tovább nem bonthatók.

4. Egy 1 egység széles egyenes vonalzóval egy síkon szerkeszthetünk. Más segédeszközünk – ceruzán kívül – nincs. A szerkesztés során a következő lépések hajthatók végre:

a) tetszőleges számú pontot felvehetünk az adott síkon,

b) két felvett ponton át egyenes húzható a vonalzóval,

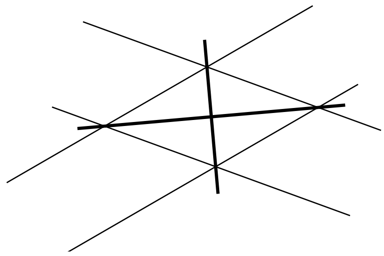
c) bármely megrajzolt egyenessel attól egységnyi távolságra lévő párhuzamos egyenes húzható.

Szerkesszünk $\sqrt{34}$ egység hosszú szakaszt a megengedett szerkesztési lépések alapján!

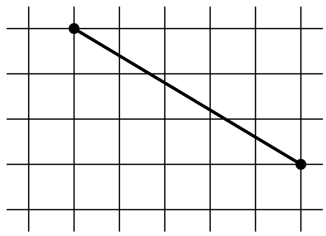
Megoldás. Első lépésként két, egymásra merőleges egyenest szerkesztünk.

Húzzunk két olyan párhuzamos, egymástól 1 egységnyi távol lévő egyenespárt, amelyek metszik egymást.

Ezek rombuszt határolnak, amelynek átlói egymásra merőlegesek, és meg is tudjuk szerkeszteni azokat. 3 pont



1. lépés



2. lépés

A merőleges egyenespárból tudunk négyzetrácsot szerkeszteni (egységoldalú négyzetekből). 2 pont

Észrevéve, hogy $34 = 9 + 25$, így a Pitagorasz-tételt használva azt kapjuk, hogy a négyzetrácsban az ábrán látható pontok $\sqrt{34}$ egység távolságra vannak egymástól. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. Az egymásra merőleges egyenesek szerkesztéséért adható 3 pont tovább nem bontható. Azaz: jó szerkesztési eljárásért 3 pont jár, hiányos vagy rossz szerkesztési eljárásra pedig nem adható pont.