Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy valós szám négyzetgyöke legfeljebb mennyivel lehet nagyobb magánál a számnál?

Megoldás. Ha a valós számot x jelöli, akkor $\sqrt{x}-x$ maximumát keressük az $x \geqq 0$ feltétel teljesülése esetén. 1 pont

Alakítsuk a különbséget teljes négyzetté:

$\sqrt{x}-x=-\left(x-\sqrt{x}\right)=-\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}\right]$, 1 pont

azaz $\sqrt{x}-x=-\left[\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2$. 1 pont

Mivel $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$, ezért $\frac{1}{4}-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq \frac{1}{4}$. 1 pont

A $\sqrt{x}-x \leqq \frac{1}{4}$ reláció alapján $\sqrt{x}-x$ maximuma legfeljebb $\frac{1}{4}$. 1 pont

Ha viszont $\sqrt{x}=\frac{1}{2}$, azaz $x=\frac{1}{4}$, akkor

$\sqrt{x}-x$ értéke éppen $\frac{1}{4}$, azaz $\sqrt{x}-x$ maximuma $\frac{1}{4}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amelyre $x^2+19x+95$ négyzetszám!

Megoldás. A feltétel szerint

$$x^2+19x+95=y^2$$

$$x^2+19x+95-y^2=0.$$

Ezt az egyenletet x-re megoldva

$$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{4y^2-19}}{2}.$$ 1 pont

Ha x egész szám, akkor $4y^2 - 19$ négyzetszám kell, hogy legyen. 2 pont

$$4y^2 - 19 = z^2$$

$$4y^2 - z^2 = 19$$

$$(2y - z)(2y + z) = 19$$

kell, hogy teljesüljön. 1 pont

Mivel a 19 prím, két egész szorzatára csak $1 \cdot 19$, $19 \cdot 1$, $(-1) \cdot (-19)$, $(-19) \cdot (-1)$ alakban írható fel, de bármelyik felírásból az $y^2 = 25$ alakhoz jutunk el. 2 pont

Ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe az $x = -5$ és az $x = -14$ értékekhez jutunk. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy derékszögű háromszög egyik befogója egy kocka éle, másik befogója ugyanennek a kockának lapátlója. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögnek van két egymásra merőleges súlyvonala!

1. megoldás. Legyen a kocka éle egységnyi, ekkor a derékszögű háromszög oldalai 1; $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$. 1 pont

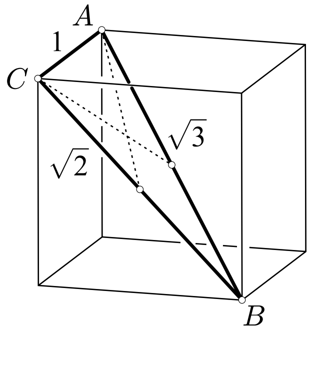
Az ábra jelöléseit használjuk.

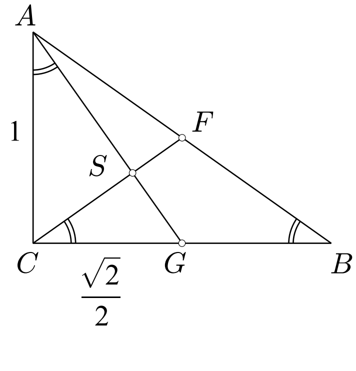
Megmutatjuk, hogy az ASC háromszög derékszögű. Az ACG háromszögben Pitagorasz tételéből $AG = \sqrt{\frac{3}{2}}$. A súlypont harmadolja a súlyvonalat, ezért $AS = \frac{2}{3} \cdot AG = \sqrt{\frac{2}{3}}$. 2 pont

Thalész tétele miatt $CF = \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Innen $CS = \frac{2}{3} \cdot CF = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 2 pont

$AS^2 + CS^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Tehát ASC derékszögű, az AG és CF súlyvonalak merőlegesek egymásra. 2 pont

Összesen: 7 pont





2. megoldás. Az ábra jelöléseivel $FC = FB$ a Thalész-tétel miatt.
Emiatt $FCB\sphericalangle = FBC\sphericalangle$. 2 pont

Az ACG és BAC derékszögű háromszögek hasonlók, mert befogóik aránya $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 2 pont

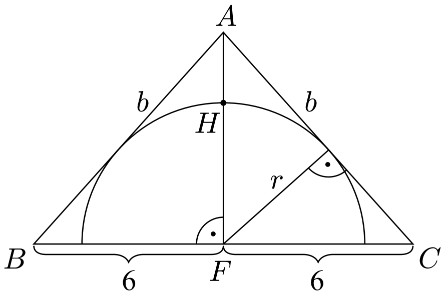
Emiatt $GAC\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. 1 pont

A kétvonalas szögek egyenlősége miatt $SCA\sphericalangle = 90^\circ - CAS\sphericalangle$. Tehát ASC derékszögű, az AG és CF súlyvonalak merőlegesek egymásra. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Egy 12 egységnyi alapú egyenlő szárú háromszögbe félkört írunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög alapján van, a félkör íve pedig érinti a háromszög szárait. Mekkora a félkör sugara, ha a félkörív az alaphoz tartozó magasságot a csúcshoz közelebbi harmadolópontban metszi?

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az ábra jelöléseit használva a feltételek szerint az $AF = m$ jelölést is bevezetve
$FH = r = \dfrac{2}{3}m$.

Az FCA derékszögű háromszög területének kétszeresére teljesül, hogy $6m = br$. 1 pont

Mivel $m = \dfrac{3}{2}r$, ezért $6 \cdot \dfrac{3}{2}r = br$, azaz $b = 9$. 2 pont

Az AFC derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva $FC^2 + FA^2 = AC^2$, azaz

$$6^2 + m^2 = 9^2$$ 1 pont

adódik, ahonnan $m = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ adódik. 1 pont

Ha pedig $r = \dfrac{2}{3}m$, akkor $r = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

5. Összeadjuk egy 2004 jegyű, 9-cel osztható számnak a számjegyeit. Az eredmény számjegyeit újra összeadjuk, végül összeadjuk az így kapott szám jegyeit is. Mit kaptunk?

Megoldás. A kiindulási feltételeknek eleget tevő legnagyobb szám csupa 9-ből áll, így az első összeadás után kapott lehető legnagyobb szám $2004 \cdot 9 = 1836$. 2 pont

Az eredmény tehát kisebb vagy egyenlő egy 1-essel kezdődő négyjegyű számnál, ennek a számjegyösszege legfeljebb $1 + 3 \cdot 9 = 28$. 2 pont

A második összeadás után kapott szám jegyeinek összege így legfeljebb 10.
($1 + 9$ is lehetne.) 1 pont

Mivel eredetileg 9-cel osztható számból indultunk ki, a számjegyek összege mindig osztható maradt 9-cel, így az utolsó lépésben is. 10-ig egyetlen 9-cel osztható egész szám van, így a végeredmény **9.** 2 pont

Összesen: 7 pont