Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy 1111-től 2007-ig bármely egész szám osztója az alábbi összegnek:

$$\begin{array}{lllll} & 1\cdot & 2\cdot & 3\cdot \ldots \cdot 896 & + \\ + & 2\cdot & 3\cdot & 4\cdot \ldots \cdot 897 & + \\ + & 3\cdot & 4\cdot & 5\cdot \ldots \cdot 898 & + \\ + \ldots & & & & \\ + & 1111\cdot & 1112\cdot & 1113\cdot \qquad \cdot 2006 & \end{array}$$

Megoldás. Az első két szorzat összege:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 896 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 897 = 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 896\cdot (1+897) = \frac{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 897\cdot 898}{897}.$$

Ezt az összeget a harmadik taghoz adva:

$$\frac{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 897\cdot 898}{897} + 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 897\cdot 898 =$$

$$= \frac{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 897\cdot 898\cdot (2+897)}{897} = \frac{3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 897\cdot 898\cdot 899}{897}.$$ 2 pont

A k. tag összegzése után a részösszeg $\frac{k\cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (895+k+1)}{897}$ lesz. 1 pont

Az 1111. tag összegzése után az összeg:

$$N = \frac{1111\cdot 1112\cdot 1113\cdot \ldots \cdot 2006\cdot 2007}{897},$$

$$897\cdot N = 1111\cdot 1112\cdot 1113\cdot \ldots \cdot 2006\cdot 2007.$$ 2 pont

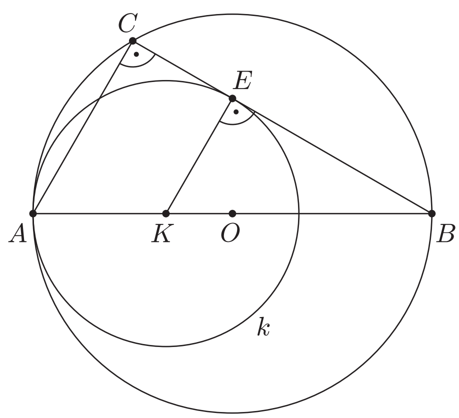
A jobb oldali szorzatban szerepel a 897 kétszerese (az 1794).

$897 = 3\cdot 13\cdot 23$ és ezek a prímtényezők többször is szerepelnek a jobb oldalon, mivel 23-nál több egymásutáni egészet szoroztunk össze. Ezért bármely számot választva a jobb oldalról, azzal osztható lesz az N összeg. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az R sugarú AB átmérőjű kört belülről érinti az r sugarú k kör az A pontban ($R > r$). Az R sugarú kör BC húrja az E pontban érinti a k kört. Ha a BE és CE szakasz mértani közepe megegyezik a két kör sugarának mértani közepével, akkor mekkora az $r : R$ arány értéke?

Megoldás.



Tekintsük az ábra jelöléseit:

O az R sugarú kör középpontja, K a k kör középpontja, melynek sugara r.

Az ábra alapján $OK = R - r$, így $KB = 2R - r$. 1 pont

A KBE derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján

$$EB = \sqrt{(2R-r)^2 - r^2} = 2\sqrt{R^2 - Rr}.$$ 1 pont

Thalész tétele alapján az ABC háromszög derékszögű, valamint KE párhuzamos AC-vel, hiszen KE is merőleges BC-re, ezért a B csúcsú szögre a párhuzamos szelők tétele alapján

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BK}{KA}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{2\sqrt{R^2 - Rr}}{EC} = \frac{2R - r}{r},$$ 1 pont

ahonnan $EC = \dfrac{2r \cdot \sqrt{R^2 - Rr}}{2R - r}$. 1 pont

A feladat feltétele alapján $EC \cdot EB = R \cdot r$, azaz

$$\frac{2r \cdot \sqrt{R^2 - Rr}}{2R - r} \cdot 2\sqrt{R^2 - Rr} = Rr,$$ 1 pont

így $4r(R^2 - Rr) = Rr(2R - r)$. Rr-rel való osztás és rendezés után $4(R - r) = 2R - r$ adódik, ahonnan $2R = 3r$.

Ekkor pedig $\dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{3}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. A Matematikai Kaszinóban a következő játékot játszhatjuk: 1-től 10000-ig vannak számok egy urnában, ezek közül véletlenszerűen kihúznak egyet. Ha *szép* szám jött ki, kapunk n forintot, ha nem, be kell fizetnünk 1 forintot. A Kaszinóban *szépnek* nevezik azokat az a egész számokat, amelyek oszthatók negyedik gyökük egészrészével, tehát $\left[\sqrt[4]{a}\right] \mid a$.

(a) Hány *szép* szám van 1-től 10 000-ig?

(b) Melyik az a legkisebb egész n, amire érdemes játszani?

Megoldás. (a) Intervallumokra bontjuk a lehetséges számok halmazát, a negyedik gyök egészrésze szerint.

Ha $1 \leqq a < 16$, akkor $\left[\sqrt[4]{a}\right] = 1$. Tehát az $1, 2, \ldots, 15$ számok szépek.

Ha $16 \leqq a < 81$, akkor $\left[\sqrt[4]{a}\right] = 2$. Tehát a $16, 17, \ldots, 80$ számok közül a párosak szépek.

Általában ha $k^4 \leqq a < (k+1)^4$, akkor $\left[\sqrt[4]{a}\right] = k$. Tehát a $k^4, k^4+1, \ldots, (k+1)^4 - 1$ számok közül minden k. szép, az elsővel kezdve. 2 pont

A k^4 és $(k+1)^4 - 1$ közé eső szép számok:

$$k^4,\ k^4+k,\ k^4+2k,\ \ldots,\ k^4+4k^3+6k^2+4k = k^4+(4k^2+6k+4)k.$$

Ez összesen $4k^2+6k+5$ szép szám. Mivel a 10000 is szép, a következő képlet adja a keresett darabszámot:

$$1 + \sum_{k=1}^{9} 4k^2 + 6k + 5 = 1456.$$ 3 pont

(Itt összeadhatunk 9 darab számot, vagy dolgozhatunk az ismert összegképletekkel:

$$1 + \sum_{k=1}^{9} 4k^2 + 6k + 5 = 1 + 4\sum_{k=1}^{9} k^2 + 6\sum_{k=1}^{9} k + \sum_{k=1}^{9} 5 =$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + 6 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} + 9 \cdot 5 = 1456.)$$

(b) Feltételezhetjük, hogy bármelyik szám kihúzásának esélye azonos, ezért az átlagos nyereséget számolhatjuk úgy, mintha minden számot egyszer húznának ki. 1456 esetben nyerünk n forintot, 8544 esetben pedig veszítünk 1 forintot. Akkor várhatunk pozitív eredményt, ha $1456n > 8544$. Az egyenlőtlenség $n \geqq 6$ esetén teljesül. Ha n legalább 6, érdemes játszani. 2 pont

---

Összesen: 7 pont