

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ négyzetben felvettünk egy P pontot úgy, hogy az egyenlő, 10 centiméteres távolságra van a DC oldal F felezőpontjától és az A és B pontoktól.

Mekkora az $ABCD$ négyzet területe?

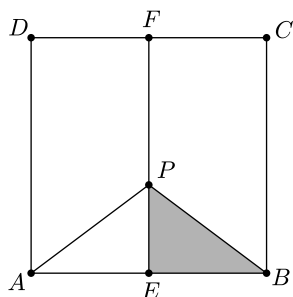
Megoldás. $FP = AP = BP = 10$ cm.

$AB = BC = CD = DA = a$.

Az ábra készítése és P helyes elhelyezése.

1 pont

Az E az AB oldal felezőpontja. Az EPB derékszögű háromszögre írjuk fel a Pitagorasz tételt:



$$PE^2 + EB^2 = PB^2,$$

$$(a - 10)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 10^2,$$

2 pont

$$a^2 - 20a + 100 + \frac{a^2}{4} = 100,$$

$$\frac{5a^2}{4} = 20a.$$

1 pont

Mivel $a \neq 0$,

$$\frac{5a}{4} = 20,$$

1 pont

ezért $a = 16$.

1 pont

Így a négyzet területe $T = a^2 = 16^2 = 256$ cm².

1 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg mindazokat az x, y, m számhármassokat, amelyekre

$$-2x + 3y = 2m \quad \text{és} \quad x - 5y = -11$$

egyszerre teljesül, továbbá x negatív egész szám, y pozitív egész szám, m pedig valós szám!

Megoldás. A 2. egyenlet x -re rendezve $x = 5y - 11$.

1 pont

Mivel $x < 0$, $y < \frac{11}{5}$ -nek kell teljesülni.

1 pont

Az y -ra vonatkozó feltétel alapján $y = 1$ vagy $y = 2$ lehet csak, legyen $y_1 = 1$ és $y_2 = 2$.

1 pont

Az ezekhez tartozó x értékek: $x_1 = -6$, $x_2 = -1$.

1 pont

Ezeket az első egyenletbe helyettesítve kapjuk m értékeit: $m_1 = 7,5$, $m_2 = 4$.

1 pont

Az egyenleteket kielégítő számhármassok:

$$\begin{aligned} x = -1, \quad y = 2, \quad m = 4, \\ \text{és} \quad x = -6, \quad y = 1, \quad m = 7,5, \end{aligned}$$

és ezek valóban megoldásai az egyenletrendszernek.

2 pont

Összesen: 7 pont

3. Van négy ember, akiknek a keresztnévei sorra Ádám, Balázs, Csaba, Dávid. E négy férfinak a családi nevei is Ádám, Balázs, Csaba és Dávid, nem feltétlenül ilyen sorrendben. Az alábbiakat tudjuk róluk:

- i. Minden egyes ember családi neve különbözik a keresztnévétől.
- ii. Csaba családi neve nem Ádám.
- iii. Balázs családi neve megegyezik annak az embernek a keresztnévével, akinek a családi neve megegyezik annak az embernek a keresztnévével, akinek a családi neve Dávid.

Mi a négy ember teljes neve?

Megoldás. Az alábbi táblázatban megjelöltük azokat az eseteket, amik nem lehetnek a fenti feltételek miatt.

		családi neve:			
		A	B	C	D
kereszt- neve:	A	i.	BA	CA	DA
	B	AB	i.	CB	DB
	C	ii.	BC	i.	DC
	D	AD	BD	CD	i.

Lehetséges nevek így lehetnek AB, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC. Mivel minden családi nevet és keresztnévet nevet pontosan egyszer használunk, minden sorban és oszlopban egy-egy névnek kell lennie.

Jelölhetjük a lehetséges eseteket az alábbi táblázat szerint is. Ekkor az iii. feltétel miatt a jobb oldali táblázathoz hasonló elrendezést várunk.

keresztnev	A	B	C	D
családi név	B	A	B	A
	C	C	D	B
	D	D		C

keresztnev	B	X	Y
családi név	X	Y	D

1 pont

A iii. feltétel miatt Balázs családi neve lehet Ádám, Csaba vagy Dávid.

Ha Balázs családi neve Dávid, akkor a iii. feltétel két emberről szólna, Balázs Dávidról és Dávid Balázsról. Így a másik két ember az i. miatt csak Ádám Csaba és Csaba Ádám lehet, ami viszont ellentmond a ii. feltételnek. Tehát a Balázs keresztnévű ember családi neve nem lehet Dávid.

		családi neve:			
		A	B	C	D
kereszt- neve:	A	i.	BA	CA	DA
	B	AB	i.	CB	DB
	C	ii.	BC	i.	DC
	D	AD	BD	CD	i.

keresztnev	B	D	B	C	A
családi név	D	B	D	A	C

1 pont

Ha Balázs családi neve Csaba, akkor Csaba családi neve azonos Dávid keresztnévével az iii. miatt. Csaba családi neve ii. miatt viszont csak Balázs vagy Dávid lehet. Ha Csaba családi neve Balázs, akkor az iii. miatt Dávidnak is ez lenne a keresztnéve, de így két embernek ugyanaz lenne a keresztnéve és nem lenne Ádám vagy Dávid keresztnévű ember; ha pedig Dávid, akkor iii. miatt Dávidnak Dávid lenne a családi neve is, ami viszont i.-nek mond ellent. Tehát a Balázs keresztnévű ember családi neve nem lehet Csaba sem.

		családi neve:			
		A	B	C	D
kereszt- neve:	A	i.	BA	CA	DA
	B	AB	i.	CB	DB
	C	ii.	BC	i.	DC
	D	AD	BD	CD	i.

keresztnev	B	C	B/D	D v. A/-
családi név	C	B/D	D	A

2 pont

Tehát a Balázs keresztnévű ember csak Ádám családi nevű lehet. Ekkor iii. miatt Ádám családi neve megegyezik Dávid keresztnévével. Így az i. feltétel miatt Dávidnak nem lehet a keresztnéve Ádám. Dávid keresztnéve nem lehet Balázs, mert azt már az Ádám családi nevű elhasználta. Így Dávid keresztnéve csak Csaba lehet az i. miatt. Ezért iii. miatt Ádám családi neve Csaba. Így a Balázs családi nevűnek a Dávid keresztnév marad.

		családi neve:			
		A	B	C	D
kereszt- neve:	A	i.	BA	CA	DA
	B	AB	i.	CB	DB
	C	ii.	BC	i.	DC
	D	AD	BD	CD	i.

keresztnev	B	A	B/C	D
családi név	A	B/C	D	B

2 pont

Így a négy fiú nevei: Ádám Balázs, Csaba Ádám, Dávid Csaba és Balázs Dávid.

1 pont

Összesen: 7 pont

4. Mely pozitív egészekből álló (a, b, c) számhármassal elégíti ki az alábbi feltételeket?

$$a + b = c^3,$$

$$a + b + c = 130,$$

$(a - b)$ osztható 19-cel.

Megoldás. Az első egyenletből $(a + b)$ -t behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy

$$c + c^3 = 130.$$

1 pont

130 alatt csak az 1, 8, 27, 64, 125 köbszámok találhatóak. Így gyorsan leellenőrizhető, hogy csak a $c = 5$ elégíti ki ezt az egyenletet.

1 pont

A harmadik feltétel az $a - b = 19k$ alakba írható, ahol k egész szám

1 pont

Így az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$a + b = 125,$$

$$a - b = 19k.$$

Összeadva a két egyenletet kapjuk, hogy $2a = 125 + 19k$.

Kivonva az első egyenletből a másodikat kapjuk, hogy $2b = 125 - 19k$.

1 pont

Vegyük észre, hogy k csak páratlan egész szám lehet, mert a és b pozitív egész számok. Mivel a -nak és b -nek pozitívnak kell lennie, ezért csak a $k = -5, -3, -1, 1, 3, 5$ esetekben kapunk megoldást.

k	1	3	5	-1	-3	-5
a	72	91	110	53	34	15
b	53	34	15	72	91	110

Tehát hat számhármassal elégíti ki a fenti feltételeket:

$$(72, 53, 5), (91, 34, 5), (110, 15, 5), (53, 72, 5), (34, 91, 5), (15, 110, 5).$$

3 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha csak a pozitív k -kra ad megoldást, akkor csak 1 pont adható a 3-ból.

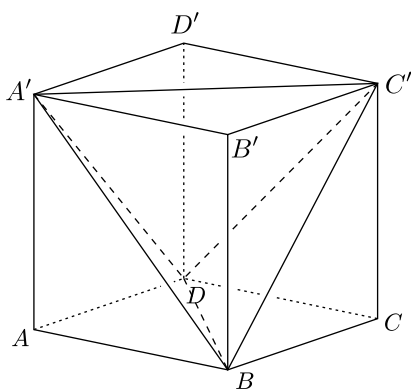
5. Színes kockákat készítünk a következő szabályok szerint:

- (1) A kocka mindegyik lapját az egyik átlóval két háromszögre bontjuk úgy, hogy minden megrajzolt átló mindegyik végpontjához másik két ilyen átló csatlakozzék!
- (2) Az azonos lapokon található háromszögek különböző színűek legyenek!
- (3) Az azonos élek mentén csatlakozó háromszögek ugyanolyan színűek legyenek!

Hányféle kockát készíthetünk így, ha hat színt használhatunk fel a színezéshez?

(Nem tekintünk különbözőnek két kockát, ha elforgatással egymásba vihetők!)

Megoldás.



Az első szabály alapján a kockát felosztó hat átló 12 végpontja négy csúcsba kerül (lásd ábra).

1 pont

A kocka további négy csúcsában (az ábrán A , C , B' , D') a második szabály szerint ugyanolyan színű háromszögek találkoznak.

1 pont

Egy-egy ilyen háromszög hármass egy gúlapalástot alkot, és a négy palást lapátlok mentén érintkezik így a második szabály alapján, ezeket mind különböző színűvel kell befesteni.

1 pont

A négy szín kiválasztása $\binom{6}{4} = 15$ -féleképpen történhet.

1 pont

A négy szín közül az első kettőt bármely két csúcsba tehetjük, elforgatás szempontjából ez nem jelent különböző lehetőségeket. Tegyük például B' -be és A -ba.

1 pont

Az azonban az elforgatás szempontjából már nem mindegy, hogy a maradék két szín közül melyiket tesszük C -be és melyiket D' -be. Így minden négy színt kétféleképpen helyezhetünk el a kockán.

1 pont

Tehát összesen $\binom{6}{4} \cdot 2 = 30$ -féle kockát készíthetünk.

1 pont

Összesen: 7 pont