Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
2. (döntő) forduló
kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A tízes számrendszerben adott A_n és B számok a következők: $A_n = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$, ahol az emeletes hatványban összesen n db 2-es van; $B = 2^{222\ldots2}$, ahol a kitevőben 2009 db 2-es áll. Mely n pozitív egész számokra lesz $A_n > B^B$?

Megoldás. Azt állítjuk, hogy $A_7 > B^B > A_6$.

Először belátjuk, hogy A_7 nagyobb B^B-nél:

Mivel $A_7 = 2^{2^{2^{65\,536}}} = 2^{2^{65\,535}\cdot 2^{2^{65\,536}-65\,535}} = \left(2^{2^{65\,535}}\right)^{\left(2^{2^{65\,536}-65\,535}\right)}$; ezért csak azt kell igazolni, hogy ez utóbbi kifejezésben az alap és a kitevő is nagyobb, mint B.

Mivel $2^{65\,535} > 2^{4\cdot 16\,383} = 16^{16\,383} > 10^{16\,383} > \underbrace{222\ldots2}_{2009}$, ezért $2^{2^{65\,535}} > 2^{\overbrace{222\ldots2}^{2009}} = B$. Ezzel az alapra beláttuk, hogy nagyobb, mint B. A kitevőről ezek után elég azt igazolni, hogy az alapnál nagyobb, azaz hogy: $2^{2^{65\,536}-65\,535} > 2^{2^{65\,535}}$. Ehhez elég belátni, hogy

$$2^{65\,536} - 65\,535 > 2^{65\,535}.$$

Átalakítva ezt az egyenlőtlenséget: $2 \cdot 2^{65\,535} - 65\,535 > 2^{65\,535}$ adódik. Mindkét oldalból levonva $2^{65\,535}$-öt pedig azt kapjuk, hogy $2^{65\,535} - 65\,535 > 0$, azaz $2^{65\,535} > 65\,535$. Ez viszont nyilvánvalóan igaz, hiszen pl. teljes indukcióval egyszerűen belátható, hogy minden n természetes számra $2^n > n$. Ezzel beláttuk azt is, hogy a kitevő nagyobb, mint B, tehát valóban igaz, hogy $A_7 > B^B$, mint ahogyan azt állítottuk.

Most nézzük A_6-ot. $A_6 = 2^{2^{65\,536}}$, míg

$$B^B = \left(2^{222\ldots2}\right)^{2^{222\ldots2}} = 2^{222\ldots2\cdot 2^{222\ldots2}} > 2^{2^{222\ldots2}} > 2^{2^{65\,536}} = A_6,$$

tehát valóban $B^B > A_6$, ahogyan azt állítottuk.

2. Adott egy k kör és a belsejében két pont A és B. Szerkesszen a k körön olyan C pontot, amelyre az ACB szög maximális!

Megoldás. Vegyük azt a két A-n és B-n átmenő kört, amelyek k-t belülről érintik és legyenek az érintési pontok C_1 és C_2! Ha a C_1 érintési pontú kör sugara a kisebb, akkor C_1 esetén, ha a két kör sugara egyenlő, akkor C_1 és C_2 esetén lesz a kérdezett szög maximális, hiszen az első esetben a k kör C_1-től különböző pontjai, a második esetben a C_1-től és C_2-től különböző pontjai az AB szakasz AC_1B szögű látókörén kívül vannak. A C_1 és C_2 szerkesztése pl. a következő lehet.

$a)$ Ha az AB felezőmerőlegese átmegy a k kör középpontján, akkor ez metszi ki a k-ból C_1-et és C_2-t.

$b)$ Ha az AB felezőmerőlegese nem megy át a k kör középpontján, akkor vegyünk egy az A-n és B-n áthaladó és a k kört az A_1 és B_1 pontokban metsző k_1 kört és legyen az AB és A_1B_1 egyenesek metszéspontja P, továbbá a P-ből a k körhöz húzott érintők érintési pontjai C_1 és C_2! Végül legyen a k-t a C_1 és C_2 valamelyikében – mondjuk a C_1-ben – belülről érintő és az A-n átmenő kör k_2!

Megmutatjuk, hogy k_2 átmegy B-n is. Messe a PA egyenes a k_2-t B_2-ben! A P pontból a k_1 körhöz húzott szelődarabok szorzata állandó, tehát: $PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1$.

PC_1 érintője k-nak, tehát: $\quad PC_1^2 = PA_1 \cdot PB_1$;
PC_1 érintője k_2-nek, tehát: $\quad PC_1^2 = PA \cdot PB_2$.

Ezekből: $PA \cdot PB_2 = PA \cdot PB$, vagyis B_2 egybeesik B-vel.

A bizonyítás teljességéhez hozzátartozik az alábbi két (**A** és **B**) diszkusszió.

A) Diszkusszió

Igazolandó, hogy valóban csak két érintő kör jöhet szóba, azaz hogy C_1 és C_2 a két oldalon az egyetlen lehetséges érintési pont.

Igazolás: Tekintsük a k alapkört, illetve egy A-t és B-t tartalmazó, a k-t érintő k_2 kört, melynél az érintési pont C_1. Tegyük fel, hogy ugyanezen az oldalon létezik még egy másik megfelelő, $\overline{k_2}$ kör is, $\overline{C_1}$ érintési ponttal.

Azt vizsgáljuk meg, hogy ennek a három körnek az ívdarabjai milyen viszonyban vannak egymással. Koncentráljunk arra, hogy minden körvonal felosztja a síkot egy belső és egy külső tartományra.

Tekintsük először a k_2 és a $\overline{k_2}$ kör viszonyát. Mivel két pontjuk: A és B közös, ezért más közös pontjuk nem lehet, így a nagyobbik kör két ívdarabra bontható, melyek egyike a kisebbik kör külsejében, másika a belsejében halad. Tekintsük az előbbi (külső részben haladó) ívdarab pontjait. Ha mondjuk A-ból félegyeneseket indítunk ennek az ívdarab pontjainak az irányába, akkor a kisebbik körrel való metszéspont mindig közelebb lesz, mint a nagyobbikkal való. Ha pl. történetesen C_1 a kisebbik kör érintési pontja, akkor az AC_1 félegyenesen C_1-en túl lesz a nagyobbik körrel való metszéspont. Ez azt jelenti, hogy a nagyobbik körnek van olyan pontja, mely a k alapkör külsejében van, ezért biztosan metszi a k körívet, tehát nem lehet érintő kör.

B) Diszkusszió

Igazolandó, hogy az optimális megoldást szolgáltató kisebbik érintő kör középpontja és a nagy kör középpontja mindig az AB egyenesének ellentétes oldalán lesznek, tehát ez alapján mindig egyértelműen kiválasztható a két megoldás közül az optimális.

Igazolás: A C_1 és C_2 által meghatározott szakasz felező merőlegese áthalad P-n. Tekintsük ezt az e egyenest úgy, mint egy szimmetriatengelyét az ábrának. Legyen a k alapkör középpontja O, továbbá a két potenciális megoldást szolgáltató érintő körök középpontjai O_1, illetve O_2, a megfelelő érintési pontok pedig értelemszerűen C_1 és C_2. Ekkor C_1 és C_2 szimmetrikusan helyezkednek el az e egyenes két oldalán. Tekintsük az AB szakasz felező merőlegesét, legyen ez f. Ekkor az f egyenesnek az OC_1 és OC_2 szakaszokkal való metszéspontjai adják rendre az O_1, illetve O_2 középpontokat. Tekintsük az e egyenes által meghatározott két félsíkot. Tegyük fel mondjuk, hogy a C_2 érintési pont azonos félsíkban van az AB szakasszal. Azt állítjuk, hogy a C_2 pont adja az optimális megoldást. Ehhez azt kell bizonyítani, hogy a C_2-höz tartozó kör a kisebb, azaz O_2C_2 rövidebb, mint O_1C_1. Ez egyenértékű azzal, hogy OO_2 hosszabb OO_1-nél.

Legyen e és f metszéspontja M. Vizsgáljuk most az OMO_1, illetve az OMO_2 háromszögeket. O-nál egyforma szögek vannak a szimmetria miatt.

Lemma: *Az OMO_1 szög hegyesszög, míg az OMO_2 szög tompaszög.*

Lemma bizonyítása: AB és f merőlegesek egymásra, továbbá az e egyenes az AB által meghatározott félsíkok közül az O_2-vel ellentétes tartományban található. Legyen AB és f metszéspontja N. Ekkor az MNP háromszögben N-nél derékszög van, tehát az $NMP\sphericalangle$ hegyesszög, az $OMO_2\sphericalangle$ így biztosan tompaszög lesz, következésképp az $OMO_1\sphericalangle$ hegyesszög.

Húzzunk O_1-ből merőlegest az e egyenesre. A Lemma miatt ez az egyenes az O_1OO_2 háromszög belsejében halad, tehát annak OO_2 oldalát belül metszi. Legyen ez a metszéspont $\overline{O_1}$. A szimmetria miatt OO_1 és $O\overline{O_1}$ azonos hosszúságú, tehát OO_2 nagyobb OO_1-nél, és éppen ezt kellett belátnunk.

3. Egy háromszög csúcsain át összesen 2009 db egyenest fektetünk úgy, hogy minden egyenes kettévágja a háromszöget és a csúcsokon kívül egyetlen metszésponton sem megy át kettőnél több egyenes. Adjon minél jobb felső becslést a háromszögben keletkező tartományok számára!

Megoldás. Jelöljük a három csúcsból indított egyenesek számát rendre n, k, illetve l-lel. Az első csúcsot tekintve, az onnan indított n db egyenes $n+1$ tartományra bontja a háromszöget. A következő csúcsból indított k db egyenes mindegyike metszi az előbb behúzott n db egyenest, ezért pontosan $n+1$ új tartomány keletkezik mindegyik behúzásakor. Összesen tehát $k \cdot (n+1)$ új tartományt kapunk ebben a lépésben. A harmadik csúcsból indított l db egyenes a már behúzott $n+k$ db egyenes mindegyikét metszi, minden újabb egyenes behúzásakor tehát $n+k+1$ db új tartomány keletkezik, összesen $l \cdot (n+k+1)$ db. Mindösszesen tehát $T = (n+1) + k \cdot (n+1) + l \cdot (n+k+1)$ tartományt kapunk. Az iménti kifejezést még két másik formában is felírjuk:

$$T = (n \cdot l + k \cdot l + n \cdot k) + n + k + l + 1; \quad \text{illetve} \quad T = (n+k+1) \cdot (l+1) + n \cdot k.$$

Az iménti első felírásból jól látszik n; k; és l szimmetrikus szerepe (ahogy azt el is várjuk). Ezt a továbbiakban hallgatólagosan felhasználjuk.

Mivel $n+k+l$ páratlan, így biztosan van a három szám között páratlan. Legyen ez pl. az l. Ekkor tehát $n+k$ páros. Ha T maximális, akkor a fenti második formula szerint

$$T = (n+k+1)\cdot(l+1) + n\cdot k \geqq (n_0+k_0+1)\cdot(l+1) + n_0\cdot k_0$$

tetszőleges n_0, k_0-ra. Mivel $(n+k+1)\cdot(l+1) = (n_0+k_0+1)\cdot(l+1)$, ezért tehát $n\cdot k \geqq n_0\cdot k_0$. Ha $n \neq k$ (pl. $n > k$), akkor $(n-1)\cdot(k+1) = n\cdot k + n - k - 1 > n\cdot k$; hiszen mivel $n+k$ páros, ezért $n-k \geqq 2$. Ezért biztosan $n = k$ (ez megintcsak $n+k$ párossága miatt lehetséges). Ezért tehát T csak $n = k$ esetén lehet maximális. Ekkor tehát (k helyébe n-et helyettesítve):

$$T = (2\cdot n+1)\cdot(l+1) + n^2.$$

Növeljük meg n értékét 1-gyel. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\overline{T} = (2\cdot n+3)\cdot(l-1) + n^2 + 2\cdot n + 1.$$

Vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz $\overline{T} > T$. Az előző két kifejezés összevetéséből némi átalakítás után azt kapjuk, hogy pontosan akkor, ha $n < l - 1{,}5$. Ez $n = 669$; $l = 671$ esetén fennáll (kisebb n-ekre is nyilvánvalóan), nagyobb n-ekre pedig már nem teljesül. A T értéke tehát $n = k = 670$; $l = 669$ esetén lesz maximális.