

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2010}$ teljesül?
2. Adott az $ABCD$ paralelogramma. Adjon eljárást a BC oldal azon X pontjának a megszerkesztésére, amin keresztül ha a BD átlóval párhuzamos egyenest húzunk, az egyenes harmadolja a paralelogramma területét! (A szerkesztést nem kell elvégeznie!)
3. Adjunk meg olyan negyedfokú egész együtthatós egyenletet, ahol a főegyüttható 1 és az egyenlet egyik gyöke $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
4. Tudjuk, hogy az $f(x) = \frac{p^2}{100} - x^2$ függvény grafikonja és az x tengely által meghatározott síkidomba olyan maximális kerületű téglalap írható, amelynek két csúcsa az x tengelyen, kettő pedig $f(x)$ grafikonján van rajta.
 - a) Milyen p paraméter esetén létezik a feladatnak megfelelő téglalap?
 - b) Bizonyítsuk be, hogy maximális kerületű téglalap létezése esetén van a téglalapnak olyan csúcsa, amelynek az $f(x)$ függvény görbéje által meghatározott parabola csúcsától mért távolsága független a p paraméter értékétől!