Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
3. (döntő) forduló
Kezdők II. kategória

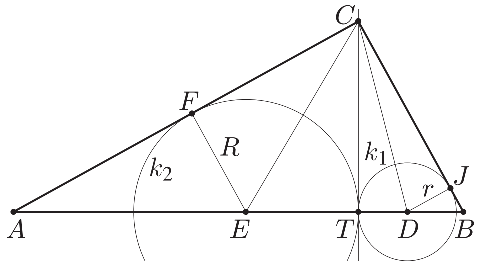
Megoldások és javítási útmutató

1. Hány olyan sorrendje van a 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012 és a 2013 számoknak, melyben bármely négy egymást követő szám összege osztható 3-mal?

Megoldás. Minket csak a megadott számok hármas maradékai érdekelnek. Ezek rendre 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, melyek összege osztható 3-mal. Legyen a számok, egy a feladatnak megfelelő sorrendje $n_1, n_2, \ldots, n_7$! Mivel ekkor $3 \mid (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$ és $3 \mid (n_4 + n_5 + n_6 + n_7)$, így $3 \mid n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7$. De a hét szám hármas maradékának az összege osztható 3-mal, így az előzőek alapján $3 \mid n_4$. Ebből következik, hogy $3 \mid n_1 + n_2 + n_3$, ami csak úgy lehet, hogy az első három szám hármas maradéka páronként különböző, azaz 0, 1, 2 valamilyen sorrendben. Mivel $3 \mid n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ és $3 \mid n_2 + n_3 + n_4 + n_5$, így $3 \mid n_5 - n_1$, hasonlóan $3 \mid n_6 - n_2$ és $3 \mid n_7 - n_3$, azaz hármas maradékaik páronként egyenlők, ezért az első három szám meghatározza az utolsó hármat. Ez alapján n_4 háromféle lehet, míg n_1, n_2, n_3 értékeit $2^3 \cdot 3!$ féleképpen választhatjuk meg, így a feladatnak megfelelő sorrendek száma $3 \cdot 2^3 \cdot 3! = 144$.

2. Adott egy kör az AB átmérőjével. Legyen C a körvonal A-tól és B-től különböző pontja! Az ABC háromszög AB oldalán felvesszük a D és E pontot úgy, hogy $AD = AC$ és $BE = BC$ teljesüljön. Legyen k_1 a BC befogót érintő D középpontú, míg k_2 az AC befogót érintő E középpontú kör! Legyen T az ABC háromszög beírt körének, míg T_1 a k_1 és T_2 a k_2 körnek a területe! Hogyan vegyük fel a C pontot, hogy a $\dfrac{T}{T_1 + T_2}$ tört értéke maximális legyen? Mekkora ez a maximális érték?

Megoldás. Thalész tételéből következik, hogy az ABC háromszög derékszögű, melynek átfogója AB.



Készítsünk ábrát!

Legyen a háromszög átfogójához tartozó magassága CT! Mivel $AD = AC$, ezért

$$ADC\sphericalangle = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2},$$

így $DCT = \dfrac{\alpha}{2}$. Mivel $BCT\sphericalangle = \alpha$, ezért DC

a BCT szög felezője. Így D egyenlő távolságra van a CT és CB egyenesektől, tehát k_1 érinti CT-t is. Mivel CT merőleges DT-re, ezért az érintési pont T. Hasonlóan belátható, hogy k_2 T-ben érinti CT-t. Ebből következik, hogy $ED = R + r$. Mivel $EB = BC = a$ és $AD = AC = b$, ezért $ED = a + b - c$. Ismert, hogy a derékszögű háromszög beírt körének sugara $r_b = (a + b - c)/2$, így $r_b = (R + r)/2$. Ezek alapján

$$\frac{T}{T_1 + T_2} = \frac{r_b^2 \pi}{r^2\pi + R^2\pi} = \frac{r_b^2}{r^2 + R^2} = \frac{r^2 + R^2 + 2rR}{4(r^2 + R^2)} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2rR}{r^2 + R^2}\right) \leqq \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

hisz $2Rr \leqq R^2 + r^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \leqq (R - r)^2$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $R = r$, azaz ha az EDC háromszögben a CT magasság egyben szimmetriatengely, tehát az EDC háromszög egyenlő szárú. Ekkor a DCT és ECT szögek egyenlők, tehát $\alpha/2 = \beta/2$, azaz $\alpha = \beta$, tehát az ABC háromszög egyenlő szárú. Tehát a tört értéke akkor maximális, ha C az AB ív felezőpontja. A maximális érték $\frac{1}{2}$.

3. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x + y + z = 2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Megoldás. Mivel $x + y + z = 2$, így $z - 1 = 1 - x - y$. Ez alapján

$$xy + z - 1 = xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1).$$

A többi ehhez hasonlóan átalakítható:

$$yz + x - 1 = (y - 1)(z - 1) \quad \text{és} \quad zx + y - 1 = (z - 1)(x - 1).$$

Ez alapján az algebrai törtek összege

$$\frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1} =$$

$$= \frac{1}{(x - 1)(y - 1)} + \frac{1}{(y - 1)(z - 1)} + \frac{1}{(z - 1)(x - 1)} =$$

$$= \frac{x + y + z - 3}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)} = \frac{-1}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)}.$$

Legyen a prímszám q!

Ekkor $(x - 1)(y - 1)(z - 1) = -q$. Azaz felírtuk a q prímszám ellentettjét három egész szám szorzataként, ami csak úgy lehetséges, hogy a tényezők közül az egyik 1, a másik -1, a harmadik q, vagy kettő darab 1-gyel egyenlő és a harmadik $-q$-val, vagy kettő -1-gyel egyenlő egy pedig $-q$-val.

Az elő eset teljesül, ha pl. $x = 2$, $y = 0$, $z = q + 1$ (ez szimmetria okokból feltehető), ebből kapjuk, hogy $2 + 0 + q + 1 = 2$, amiből kapjuk, hogy $q = -1$, ami nem prím.

A második eset teljesül, ha pl. $x = 2$, $y = 2$ és $z = -q + 1$. Ebből kapjuk, hogy

$$2 + 2 - q + 1 = 2, \quad \text{azaz} \quad q = 3.$$

A harmadik esetén pl. $x = 0$, $y = 0$ és $z = -q + 1$. Így $0 + 0 + -q + 1 = 2$, innen $q = -1$.

A $q = 3$ esetben tehát $x = 2$, $y = 2$, $z = -2$. Ekkor a feladatban szereplő törtek egyikének sem 0 a nevezője. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk az eredményünk helyességéről. Tehát a keresett prím a 3.