Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
2. (döntő) forduló
Kezdők III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy $x+y+z=2$. Tudjuk, hogy az

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}$$

összeg egy prímszám reciprokával egyenlő. Melyik ez a prímszám?

Megoldás. Mivel $x+y+z=2$, így $z-1=1-x-y$. Ez alapján

$$xy+z-1=xy-x-y+1=(x-1)(y-1).$$

A többi ehhez hasonlóan átalakítható:

$$yz+x-1=(y-1)(z-1) \quad \text{és} \quad zx+y-1=(z-1)(x-1).$$

Ez alapján az algebrai törtek összege

$$\frac{1}{xy+z-1}+\frac{1}{yz+x-1}+\frac{1}{zx+y-1}=$$
$$=\frac{1}{(x-1)(y-1)}+\frac{1}{(y-1)(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(x-1)}=$$
$$=\frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}=\frac{-1}{(x-1)(y-1)(z-1)}.$$

Legyen a prímszám q!

Ekkor $(x-1)(y-1)(z-1)=-q$. Azaz felírtuk a q prímszám ellentettjét három egész szám szorzataként, ami csak úgy lehetséges, hogy a tényezők közül az egyik 1, a másik -1, a harmadik q, vagy kettő darab 1-gyel egyenlő és a harmadik $-q$-val, vagy kettő -1-gyel egyenlő egy pedig $-q$-val.

Az elő eset teljesül, ha pl. $x=2$, $y=0$, $z=q+1$ (ez szimmetria okokból feltehető), ebből kapjuk, hogy $2+0+q+1=2$, amiből kapjuk, hogy $q=-1$, ami nem prím.

A második eset teljesül, ha pl. $x=2$, $y=2$ és $z=-q+1$. Ebből kapjuk, hogy

$$2+2-q+1=2, \quad \text{azaz} \quad q=3.$$

A harmadik esetén pl. $x = 0$, $y = 0$ és $z = -q + 1$. Így $0 + 0 + -q + 1 = 2$, innen $q = -1$.

A $q = 3$ esetben tehát $x = 2$, $y = 2$, $z = -2$. Ekkor a feladatban szereplő törtek egyikének sem 0 a nevezője. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk az eredményünk helyességéről. Tehát a keresett prím a 3.

2. Tekintsük azokat az emeletes hatványokat, melyek csupa 2-es számjegy felhasználásával alkothatók. (Tehát a következő számok szerepelhetnek bennük az egyes szinteken: 2, 22, 222, 2222, $\ldots$, $\underbrace{222\ldots2}_{k} = B_k$.)

Melyik a legnagyobb értékű ilyen emeletes hatvány, amely pontosan 2013 db 2-es számjegy felhasználásával képezhető?

1. megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket. Egy k szintű emeletes hatvány legalsó szintjén levő szám legyen A_1, a fölötte levő A_2, majd A_3 stb., végül a legfelső szinten lévő A_k.

$a)$ *Először megmutatjuk, hogy a legnagyobb számként csak olyan emeletes hatvány jöhet szóba, melynél minden l-re teljesül, hogy $A_l \leqq A_{l+1}$.*

Ennek igazolásához először belátjuk, hogy: $B_{k+r}^{(B_k)^x} < B_k^{(B_{k+r})^x}$ $(r \geqq 1,\ x \geqq 1)$. Miután ezt igazolni fogjuk, már egyszerű a dolgunk: ha látunk az emeletes hatványban szomszédos szinteken fordított sorrendben lévő számokat, akkor felcseréljük őket, és ezzel garantáltan növeljük a hatvány értékét. Szomszédos számok cseréjével pedig végül eljuthatunk a teljesen rendezett állapotig.

$B_{k+r}^{(B_k)^x} < B_k^{(B_{k+r})^x}$ bizonyítása:

Az egyszerűség kedvéért vezessük be átmenetileg a következő jelöléseket:

$a = B_{k+r}$, illetve $b = B_k$. Tehát $b < a$, sőt $10b < a$. Bizonyítandó, hogy $a^{b^x} < b^{a^x}$.

Először tekintsük a $b = 2$ esetet.

Legyen $2^{n-1} < a < 2^n$. Ekkor $a^{2^x} < 2^{n \cdot 2^x}$, illetve $2^{2^{(n-1)x}} < 2^{a^x}$. Elég tehát bizonyítanunk, hogy $2^{n \cdot 2^x} < 2^{2^{(n-1)x}}$. Ez ekvivalens azzal, hogy $n \cdot 2^x < 2^{(n-1)x}$, azaz, hogy $n < 2^{(n-2)x}$. Mivel $b < a$, ezért $a < 2^n$-ből következik, hogy $n \geqq 5$. $n = 5$-re $5 < 2^{3x}$ triviálisan igaz, a többi n-re teljes indukcióval adódik a kívánt egyenlőtlenség. (Bal oldal 1-gyel nő, jobb oldal 2-szeresére változik.)

Legyen most $b \geqq 22$ és $b < a < b^2$, vagyis az előző eset jelölésével élve: $n = 2$.

Ekkor $a^{b^x} < b^{2b^x}$. Elég megmutatnunk tehát, hogy $b^{2b^x} < b^{a^x}$, azaz, hogy $2b^x < a^x$. Mivel viszont $10b < a$, ezért $2b^x < 10^x b^x < a^x$.

Legyen végül $b \geqq 22$ és $n \geqq 3$ olyan egész szám, melyre $b^{n-1} < a < b^n$.

Ekkor $a^{b^x} < b^{n \cdot b^x}$. Elég tehát belátnunk, hogy $b^{n \cdot b^x} < b^{a^x}$, azaz, hogy $n \cdot b^x < a^x$. $b^{n-1} < a$ miatt $b^{x(n-1)} < a^x$, ezért elég belátni, hogy $n \cdot b^x < b^{x(n-1)}$, ami egyenértékű azzal, hogy $n < b^{x(n-2)}$. $n = 3$-ra $3 < b^x = b^{x(n-2)}$. Nagyobb n-ekre teljes indukcióval látható, hogy igaz az egyenlőtlenség. (n-et 1-gyel növelve a bal oldal 1-gyel nagyobb, a jobb oldal viszont b^x-szeresére nő.)

$b)$ *Könnyen igazolható a következő összefüggés:*

$$l \geqq 2\text{-re:} \quad B_{l+1} < 2^{B_l}.$$

Valóban, teljes indukcióval: $l = 2$-re: $222 < 1024 = 2^{10} < 2^{22}$. Ha pedig valamely k-ra már beláttuk, hogy $B_{k+1} < 2^{B_k}$, akkor $k+1$-re:

$$B_{k+2} < 2^4 \cdot B_{k+1} < 2^4 \cdot 2^{B_k} = 2^{B_k+4} < 2^{B_{k+1}}.$$

$c)$ *Szintén könnyen adódik, hogy:*

$$22^{22} < 2^{2^{22}}.$$

Valóban: $22^{22} < \left(2^5\right)^{22} = 2^{5\cdot 22} < 2^{2^7} < 2^{2^{22}}$.

$d)$ *Most már egyszerű belátnunk, hogy a keresett legnagyobb emeletes hatvány:* $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{22}}}}}}$, ahol az alsó 2011 db szinten 2-es szám szerepel, a legfelső szinten pedig 22.

– Ha a legfelső szinten lévő B_k szám 3, vagy több jegyű lenne, akkor a $b)$ pont szerint tudnánk növelni a hatvány értékén, ha kicseréljük B_k-t $2^{B_{k-1}}$-gyel.

– A legfelső szám tehát legfeljebb 22 lehet. Ekkor viszont a $c)$ pont miatt nem lehet alatta 22-es szám, hiszen akkor a legfelső két szinten lévő 22^{22}-t $2^{2^{22}}$-re cserélve megintcsak növelhetnénk a hatvány értékén.

– Ezért tehát valóban az a legnagyobb hatvány, melyben csak a legfelső szinten van 22-es, alatta pedig csupa 2-esek, hiszen ez nagyobb annál a hatványnál is, melyben minden szinten 2-es szám szerepel. $\square$

2. megoldás. *Jelölések.* Pozitív egész m-re bevezetjük az alábbi két jelölést. Legyen $2_m = 2(10^m - 1)/9$, azaz m darab kettesből álló szám. Legyen továbbá $A(m)$ a következő: $A(1) = 2$, $A(2) = 22$, $m > 2$-re pedig $A(m) = 2^{A(m-1)}$.

A feladatunk az, hogy megmutassuk, hogy az n darab kettesből álló emeletes hatványok közül $A(n)$ a legnagyobb, és minden más kisebb nála. Teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás $n = 1, 2$-re nyilvánvaló: Tegyük fel, hogy $n-1$-ig igaz, lássuk n-re, ahol $n \geqq 3$.

1. segédállítás. Ha $m \geqq 1$, akkor $2^{11^m} > 2_{m+1}$.

Bizonyítás. Ez $m = 1$-re nyilvánvaló ($2^{11} = 2048 > 22$). Ha pedig valamely m-re igaz, akkor $11^{m+1} = 11^m \cdot 11 > 11^m + 11$, hiszen $11^m > 11/10$, vagyis $2^{11^{m+1}}$ legalább még 11 darab 2-es tényezőt tartalmaz, ami legalább 2048-szorosára növeli 2^{11^m}-et, $2_{m+1}/2_m < 100$, hiszen 2_{m+1}-nek csak eggyel több jegye van, mint 2_m-nek. Innen indukcióval kész. $\square$

2. segédállítás. Ha $m \geqq 1$, akkor $A(m+1) \geqq 11A(m)$.

Bizonyítás. Ez $m = 1$-re nyilvánvaló. Ha $k \geqq 10$, akkor $2^k \geqq 11k$ ($k = 10$-re $1024 > 110$, utána a bal oldal kétszeresére, a jobb oldal 11-gyel nő, ami $(k+1)/k < 2$ miatt kevesebb, mint a kétszerese, indukció, mint az előbb). Ha $m \geqq 2$, akkor $A(m) > 10$, és ezzel készen is vagyunk. $\square$

Most tegyük fel, hogy adott a B, n darab kettesből álló emeletes hatvány.

(1) Ha a legalsó alapban 2-es áll, akkor az indukciós feltevés alapján

$$B = 2^C \leqq 2^{A(n-1)} = A(n),$$

egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha C éppen $A(n-1)$, ekkor B éppen $A(n)$.

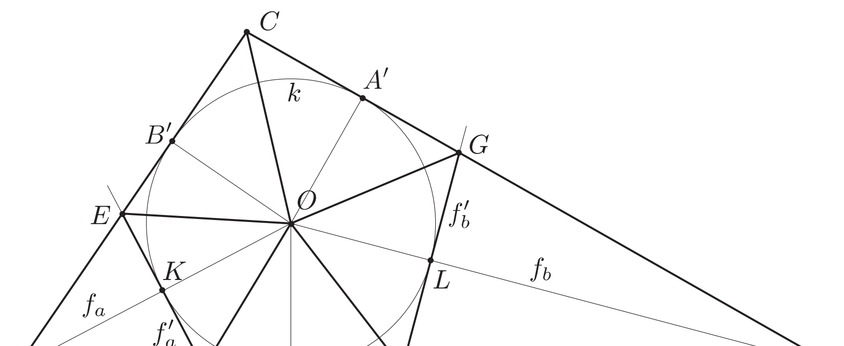
(2) Ha a legalsó alap maga B, akkor $B = 2_n < 2^2_{n-1}$, hiszen egy $n-1$ jegyű szám négyzete legalább $2n-3$ jegyű, B pedig n jegyű: ha $n > 3$, akkor ez elég is, $n = 3$-ra $22^2 > 222$ triviálisan. Ezzel ezt az esetet visszavezettük arra, amikor B valóban egy hatvány.

(3) Maradt tehát annak bizonyítása, hogy ha B legalsó alapja 2_m, ahol $1 < m < n$, akkor $B < A(n)$. Használva az indukciós feltevést és a segédállításokat:

$$B = 2^C_m \leqq 2^{A(n-m)}_m < \left(2^{11^{m-1}}\right)^{A(n-m)} = 2^{11^{m-1}A(n-m)} \leqq 2^{A(n-1)} = A(n).$$

3. Adott az ABC tompaszögű háromszög. (A C-nél lévő szög nagyobb 90°-nál.) Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög feldarabolható 7 db hegyesszögű háromszögre.

Megoldás. Húzzuk be az ABC háromszög szögfelezőit, ezek legyenek rendre f_a, f_b és f_c. Tudjuk, hogy a három szögfelező egy pontban metszi egymást, ez pedig az ABC háromszög beírt k körének O középpontja. A k beírt kör sugara legyen r, átmérője d. A megfelelő oldalakon található érintési pontok legyenek rendre A', B' és C'. A k kör és az f_a szögfelező metszéspontja legyen K, míg a k kör és az f_b szögfelező metszéspontja legyen L. K-n, illetve L-en keresztül húzzunk merőlegeseket az f_a, illetve az f_b szögfelezőkre, ezek legyenek f'_a és f'_b. Az f'_a és f'_b egyenesek érintik a k kört a K, illetve L pontban. Az f'_a egyenes messe AB-t D-ben, AC-t pedig E-ben. Az f'_b egyenes pedig messe AB-t F-ben, míg BC-t G-ben.



Azt állítjuk, hogy a következő feldarabolással nyerhető 7 háromszög mindig megfelelő lesz. A $CEDFG$ ötszög a CO, EO, DO, FO, GO szakaszokkal felvágható 5 db háromszögre. Ezekhez járul még az ADE és BGF háromszög.

Ez utóbbi két háromszög egyenlő szárú hegyesszögű háromszög, tehát velük nincs gond.

Most vegyük sorra az ötszög feldarabolásával keletkező 5 db háromszöget.

(i) Először tekintsük az EDO háromszöget. Mivel $EK = KD$, KO pedig merőleges ED-re, ezért EDO egyenlő szárú. Elég tehát a DOE szögről belátni, hogy hegyesszög. A DEA és a $C'B'A$ háromszögek hasonlóak, hiszen mindkettő egyenlő szárú. Ezért $d > B'C' > DE$, tehát $d > DE$, ezért pedig a DE-re, mint átmérőre emelt Thalész-kör sugara kisebb, mint r, így pedig O a Thalész-körön kívül van, tehát valóban $DOE\sphericalangle < 90^\circ$.

(ii) Analóg gondolatmenet mutatja, hogy az FGO háromszög is hegyesszögű.

(iii) Tekintsük most a DFO háromszöget. Mivel $DK = DC'$, $KO = C'O = r$, továbbá $OKD\sphericalangle = OC'D\sphericalangle = 90°$, ezért az OKD és $OC'D$ háromszögek egybevágóak, tehát a KDO és a $C'DO$ szögek egyenlőek, így a $C'DO$ szög hegyesszög. Analóg gondolatmenet révén adódik, hogy a $C'FO$ szög is hegyesszög, hiszen megegyezik az LFO szöggel. Mivel pedig $DC' = DK$ és $C'F = FL$, ezért $DF = DK + FL = (ED + GF)/2$. Láttuk korábban, hogy $ED < d$ és $GF < d$, ezért $DF = (ED + GF)/2 < d$ is teljesül, tehát a DF-re emelt Thalész-kör is külsejében tartalmazza az O pontot, így pedig a DOF szög hegyesszög.

(iv) Most tekintsük a GCO háromszöget. Az előző gondolatmenet mintájára adódik, hogy $GA'O$ egybevágó GLO-val, így az $A'GO$ szög megegyezik az LGO szöggel, tehát $A'GO$ hegyesszög. $A'CO$ nyilván hegyesszög, hiszen éppen a C-nél lévő tompaszög fele. $A'CO$ ugyanakkor éppen ezért nagyobb 45°-nál, tehát az $A'CO$ derékszögű háromszögben $A'CO\sphericalangle > COA'\sphericalangle$, következésképp $r = A'O > A'C$. Mivel pedig $A'G = GL < r$-t már korábban beláttuk, így $CG = A'C + A'G < 2 \cdot r = d$. Tehát a CG-re rajzolt Thalész-körön kívül fog esni az O pont, így pedig a COG szög is hegyesszög.

(v) Végül a CEO háromszögre a GCO háromszögnél elmondottak analógiájára igazolható, hogy ő is hegyesszögű.

Ezzel megmutattunk egy alkalmas feldarabolást 7 db hegyesszögű háromszögre.

A bizonyítás során semmit nem használtunk fel az ABC háromszögről, azon túl, hogy C-nél tompaszög van.