Haladók I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az S8Q-bolygón n különböző ország osztozik ($50 < n < 80$).

Bármely két különböző ország között vagy baráti, vagy ellenséges a kapcsolat (harmadik eset nincs, és a kapcsolat kölcsönös) a következő két szabály mellett:

Ha A, B, C három különböző ország, és ...

(1) A barátságos B-vel, valamint B barátságos C-vel, akkor A is barátságos C-vel.
(... barátom barátja a barátom ...)

(2) A ellenséges B-vel, és B is ellenséges C-vel, akkor A barátságos C-vel.
(... ellenségem ellensége a barátom ...)

Valamint tudjuk, hogy az n ország között lévő összes lehetséges viszonynak éppen a fele baráti, a másik fele ellenséges.

Hány ország van az S8Q-bolygón?

2. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egész számok. A háromszögbe írt kör r, és a hozzáírt körök r_1, r_2, r_3 sugarainak mérőszámai páros egész számok. Tudjuk még, hogy,

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 + r \cdot r_2 \cdot r_3 + r \cdot r_3 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű!

3. Egy n pozitív egész szám *17-edíziglen izgalmas,* ha a következő feltételek teljesülnek rá:

(1) nincs (az 1-en kívül) négyzetszám osztója;

(2) pontosan 16 pozitív osztója van;

(3) ha nagyság szerint sorba rendezem a 16 darab pozitív osztót, akkor a 10-dik, és a 7-dik osztó különbsége éppen 17.

Kérdés: Hány *17-edíziglen izgalmas* szám van?

Megoldások és javítási útmutató

1. Az S8Q-bolygón n különböző ország osztozik ($50 < n < 80$).

Bármely két különböző ország között vagy baráti, vagy ellenséges a kapcsolat (harmadik eset nincs, és a kapcsolat kölcsönös) a következő két szabály mellett:

Ha A, B, C három különböző ország, és ...

(1) A barátságos B-vel, valamint B barátságos C-vel, akkor A is barátságos C-vel.
(... barátom barátja a barátom ...)

(2) A ellenséges B-vel, és B is ellenséges C-vel, akkor A barátságos C-vel.
(... ellenségem ellensége a barátom ...)

Valamint tudjuk, hogy az n ország között lévő összes lehetséges viszonynak éppen a fele baráti, a másik fele ellenséges.

Hány ország van az S8Q-bolygón?

Megoldás. Használjunk gráfot! Az országok a csúcsok, két baráti ország között piros, két ellenséges ország között kék él vezessen.

Az (1) feltételből következik, hogy a barátság tranzitív, vagyis pl. A, és az A-val barátságos országok egy piros klikket alkotnak (a klikken belül mindenki-mindenkivel barát).

Ha a kék éleket elhagynánk, a megmaradt gráf néhány ilyen piros klikk uniója.

És persze két különböző piros klikkhez tartozó pont között kék él vezet. 1 pont

A (2) feltételből következik, hogy legfeljebb két piros klikk van a gráfunkban (különben lenne benne kék háromszög, vagyis három páronként ellenséges ország).

Valamint mivel van kék él (ellenséges viszony, hiszen az élek fele kék!) pontosan két piros klikkből, és a két piros klikk közötti kék élekből áll a gráfom. 1 pont

Legyen az országok száma n, a két szövetségi rendszerben pedig p, és q db ország ($p \geqq q$).

A piros élek száma: $\dfrac{p(p-1)}{2} + \dfrac{q(q-1)}{2}$.

A kék élek száma: pq. 1 pont

Mivel azonos a piros, és a kék élek száma:

$$\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q-1)}{2} = pq,$$

$$p^2 - p + q^2 - q = 2pq,$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = p + q.$$ 1 pont

Vagyis $n = p + q = (p-q)^2$ négyzetszám. 2 pont

De akkor az országok száma, vagyis n ($50 < n < 80$ miatt) csak 64 lehet.

(Ekkor $p + q = 64$, és $p - q = 8$ miatt $p = 36$; $q = 28$, és a kapott két szövetségi rendszer ki is elégíti a feladat feltételeit.) 1 pont

---

Összesen: 7 pont

(Megjegyzés: Könnyen általánosítható a feladat. Ha n-re nem adjuk meg az $50 < n < 80$ feltételt, akkor a feladatnak minden n négyzetszám megoldása (és csak ezek), míg a két szövetségi rendszerben lévő országok száma két egymást követő háromszögszám.)

2. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egész számok. A háromszögbe írt kör r, és a hozzáírt körök r_1, r_2, r_3 sugarainak mérőszámai páros egész számok. Tudjuk még, hogy,

$$r \cdot r_1 \cdot r_2 + r \cdot r_2 \cdot r_3 + r \cdot r_3 \cdot r_1 + r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű!

Megoldás. A feltétel alapján: $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = 1$, valamint

$$r = \frac{t}{s}, \quad r_1 = \frac{t}{s-a}, \quad r_2 = \frac{t}{s-b}, \quad r_3 = \frac{t}{s-c},$$

ahonnan: $4s - (a+b+c) = 2s = t$, így r =2, és t is egész szám, tehát 1 pont

(1) $$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{2}, \text{ másrészt}$$ 1 pont

(2) $$r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{t^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = t^2.$$ 1 pont

Tegyük fel, hogy $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3$, így $\dfrac{3}{r_1} \geqq \dfrac{1}{2}$, azaz $r_1 \leqq 6$, 2 pont

de a geometriai jelentésük és párosságuk alapján $2 = r < r_1$, így r_1 4 vagy 6. Utóbbi esetén (1) miatt $r_1 = r_2 = r_3 = 6$, és ezekkel (2) bal oldala $2 \cdot 6^3$, ami nem négyzetszám. Így $r_1 = 4$. Hasonlóan végigvezethető, hogy $r_2 = 6$ és $r_3 = 12$. 1 pont

(2)-ből $t = 24$, így $s = 12$, $s - a = 6$, $s - b = 4$, $s - c = 2$, azaz $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. A Pitagorasz-tétel megfordítása miatt a háromszög derékszögű. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

3. Egy n pozitív egész szám *17-edíziglen izgalmas,* ha a következő feltételek teljesülnek rá:

(1) nincs (az 1-en kívül) négyzetszám osztója;

(2) pontosan 16 pozitív osztója van;

(3) ha nagyság szerint sorba rendezem a 16 darab pozitív osztót, akkor a 10-dik, és a 7-dik osztó különbsége éppen 17.

Kérdés: Hány *17-edíziglen izgalmas* szám van?

Megoldás. A számom n prímtényezős felbontásában minden prímtényező 1-es kitevővel szerepel, különben lenne az 1-en kívül n-nek más négyzetszám osztója.

Vagyis $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ n prímtényezős felbontása.

Ekkor az osztók számára vonatkozó ismert képlet szerint n osztóinak a száma: $d(n) = 2^k$, vagyis n-nek 4 különböző prímosztója van.

Az egyszerűség kedvéért n prímfelbontása legyen: $n = p \cdot q \cdot r \cdot s$ (ahol $p < q < r < s$). 1 pont

Az n 16 darab osztóját a következő módon fogom jelölni (nagyság szerint sorba állítva őket):

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{15} < d_{16} = n.$$

Mivel $d_{10} - d_7 = 17$, ezért n-nek van páros, és páratlan osztója is; vagyis a 2 ott van n prímosztói között. $\rightarrow$ $n = 2 \cdot q \cdot r \cdot s$. 1 pont

Másfelől n osztói a szokásos módon osztópárokba rendezhetők.

– Egy osztópáron belül a két osztó szorzata éppen n, és
– d_i; d_{17-i} éppen egy osztópárba tartoznak.

Vagyis d_7; d_{10} éppen egymás osztópárjai, és így szorzatuk n.

A d_7; d_{10} pár között ott van a d_8; d_9 osztópár is úgy, hogy $d_8 \cdot d_9 = n$, és $d_7 < d_8 < d_9 <$ $< d_{10}$.

Ha lenne n-nek 17, vagy annál nagyobb prímosztója, pl. $q > 16$, akkor
a d_7; d_{10} pár egyik tagja osztható ezzel a q-val, és
a d_8; d_9 pár egyike is osztható ezzel a q-val.

Ekkor a négy szám $(d_7; d_8; d_9; d_{10})$ közül a két q-val osztható között legalább q a különbség, vagyis legalább 17.

De akkor $d_{10} - d_7 > 17$.

Vagyis n-nek (a 2-n kívül) a maradék három különböző prímosztója a 3; 5; 7; 11; 13 prímek közül kerülnek ki. 2 pont

Az n szám 7 legkisebb osztója (ha $n = 2 \cdot q \cdot r \cdot s$ alakú, és $2 < q < r < s$) 1, 2, q, r, s, $2q$, $2r$ (valamilyen sorrendben), hiszen mindegyiktől nagyobb $2s$, és pq is.

(Csak $pq > s$ lehetne kérdéses, de mivel pq legalább 15, s legfeljebb 13, ez is igaz.)

Vagyis d_7 vagy s, vagy $2r$ (mert ez a két szám lehet a hét legkisebb osztó közül a legnagyobb). 1 pont

$a)$ Ha $d_7 = s$ $\rightarrow$ $d_{10} = 2 \cdot r \cdot q = s + 17$, s lehetséges értékeit (7, 11, 13) végigpróbálva:
$\rightarrow$ $7 + 17 = 24$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $11 + 17 = 28$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $13 + 17 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ jó alakú $\rightarrow$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 390$ megoldás.

(Valóban a 390 legkisebb 10 osztója: 1, 2, 3, 5, 6, 10, **13**, 15, 26, **30**,...) 1 pont

$b)$ Ha $d_7 = 2r$ $\rightarrow$ $d_{10} = q \cdot s = 2r + 17$.

r lehetséges értékeit (5, 7, 11) végigpróbálva:
$\rightarrow$ $2 \cdot 5 + 17 = 27$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $2 \cdot 7 + 17 = 31$ nem jó alakú;
$\rightarrow$ $2 \cdot 11 + 17 = 39 = 3 \cdot 13$ jó alakú $\rightarrow$ $n = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 858$ megoldás.

(Valóban a 858 legkisebb 10 osztója: 1, 2, 3, 6, 11, 13, **22**, 26, 33, **39**, ...) 1 pont

Vagyis két megoldás van, és ezek a 390, és a 858.

Összesen: 7 pont