Haladók I. kategória, 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja D. Tudjuk, hogy az ABD és ADC háromszögek hasonlóak, továbbá a hasonlóság aránya $\sqrt{3}$. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

2. A pozitív egészek mindegyikét vagy zöldre vagy pirosra színezzük. Ha teljesül, hogy két különbözőképpen színezett szám összege piros, szorzata zöld, akkor az egész számok ezen színezését *kaméleon színezésnek* hívjuk.

Mi a színe egy *kaméleon színezés* esetén két zöld szám szorzatának?

Egy bizonyos *kaméleon színezés* esetén tudjuk, hogy az 1-es piros, a 77-es zöld színű. Milyen színű lesz ekkor a 2015?

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

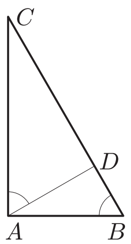
$$\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}}}=x.$$

Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC háromszög BC oldalának egy belső pontja D. Tudjuk, hogy az ABD és ADC háromszögek hasonlóak, továbbá a hasonlóság aránya $\sqrt{3}$. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

Megoldás. Először meghatározzuk, hogy az ABD és ADC háromszögek mely szögei felelnek meg egymásnak.

Mivel $ADB\sphericalangle + ADC\sphericalangle = 180°$, ezért $ADB\sphericalangle$ és $ADC\sphericalangle$ nem lehetnek hasonló háromszögek különböző szögei, tehát egyenlőknek kell lenniük. 1 pont



Ez csak úgy lehetséges, ha $ADB\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Két lehetőség maradt: $ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$ vagy $ABD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$. Az első esetben $ABD_\triangle \equiv ADC_\triangle$, amit kizárhatunk, mert a hasonlóság aránya egytől különbözik. 1 pont

Tehát $ABD\sphericalangle = DAC\sphericalangle$, és emiatt $BAD\sphericalangle = ACD\sphericalangle$.

Azt kaptuk, hogy az ABC háromszög belső szögeinek összege

$$180° = ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle + CAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle + (ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle) =$$
$$= 2(ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle),$$

tehát $ABC\sphericalangle + BCA\sphericalangle = 90°$, az ABC háromszög (A-nál) derékszögű. 2 pont

Az ABD és ADC hasonló háromszögpárban AB és AC felel meg egymásnak. Ezek az oldalak az ABC derékszögű háromszög befogói, és a feladat feltétele szerint $AC = \sqrt{3}AB$. Az pedig ismert, hogy ha egy derékszögű háromszög befogóinak aránya $1 : \sqrt{3}$, akkor a háromszög szögei $30°$, $60°$ és $90°$. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. A pozitív egészek mindegyikét vagy zöldre vagy pirosra színezzük. Ha teljesül, hogy két különbözőképpen színezett szám összege piros, szorzata zöld, akkor az egész számok ezen színezését *kaméleon színezésnek* hívjuk.

Mi a színe egy *kaméleon színezés* esetén két zöld szám szorzatának?

Egy bizonyos *kaméleon színezés* esetén tudjuk, hogy az 1-es piros, a 77-es zöld színű. Milyen színű lesz ekkor a 2015?

Megoldás. A kaméleon színezés szabályát csak a színek rövidítésével leírva kapjuk:

$$p + z = p,$$
$$p \cdot z = z.$$

Tegyük fel hogy m és n zöld színű számok. Vegyünk egy k számot, ami piros színű. Ekkor kaméleon színezés esetén $m + k$ piros lesz.

Ha az összeget szorozzuk a zöld színű n-nel, akkor az$(m + k) \cdot n$, mivel két különböző színű szám szorzata, ezért zöld lesz.

Átalakítva a szorzatot a szorzat színe nem változik, azaz zöld marad:

$$(m + k) \cdot n = mn + kn.$$

Mivel k és n különböző színűek, ezért kn zöld.

Ha mn piros lenne, akkor az $mn + kn$ összeg két különböző színű szám összege lenne, így az összeg színe piros lenne. De mivel tudjuk, hogy ez az összeg zöld, ezért mn csak zöld lehet. 3 pont

Tegyük fel, hogy a p legkisebb zöld szám. Az előbbiek alapján tetszőleges többszöröse is zöld lesz.

Lemma. *Nincs más zöld szám, csak a p többszörösei.*

Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy a, ami zöld színű, de nem p többszöröse.

Ekkor felírható $a = b \cdot p + r$ alakban, ahol a, b, r pozitív egészek, és $0 < r < p$.

Mivel p zöld, ezért $b \cdot p$ is zöld lesz. Ha r piros lenne, akkor $b \cdot p + r$-nek a kaméleon színezés értelmében pirosnak kellene lennie. De mivel a zöld, ezért r csak zöld lehet. Ez viszont ellentmond annak, hogy p a legkisebb zöld szám.

Használjuk fel ezt az eredményt! Ha az 1 piros, és a 77 zöld, akkor következtethetünk arra, hogy a 7 vagy a 11 többszörösei, és csak azok lesznek zöld színűek. 3 pont

$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$, ezért ez se nem a 7, se nem a 11 többszöröse. Így nem lehet zöld. Tehát 2015 piros színű lesz. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}}}=x.$$

Megoldás. Az $x = 0$ megoldása az egyenletnek, hiszen a legbelső gyök felől kezdve a számolást

$$\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\sqrt{2015\cdot 0}}}}}=$$

$$=\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\cdot 0}}}}=$$

$$=\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\cdot 0}}}=\sqrt{0+2014\sqrt{0+2014\cdot 0}}=\sqrt{0+2014\cdot 0}=0.$$ 1 pont

Hasonlóan az $x = 2015$ is megoldás, hisz

$$\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\sqrt{2015^2}}}}}=$$

$$=\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\cdot 2015}}}}=$$

$$=\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\sqrt{2015+2014\sqrt{2015^2}}}}=\ldots=\sqrt{2015+2014\sqrt{2015^2}}=$$

$$=\sqrt{2015+2014\cdot 2015}=\sqrt{2015^2}=2015.$$ 1 pont

A továbbiakban megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Az egyenlet értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok halmaza, így az $x < 0$ eset nem ad megoldást. 1 pont

Ha $0 < x < 2015$, akkor

$$\sqrt{2015\,x} > \sqrt{x^2} = x.$$

Ezt a lépést belülről kifelé haladva egymás után többször alkalmazva az egyenlet bal oldala

$$\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}}} >$$

$$> \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\,x}}}} =$$

$$= \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}} > \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\,x}}} =$$

$$= \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}} > \sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\,x}} =$$

$$= \sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}} > \sqrt{x+2014\,x} =$$

$$= \sqrt{2015\,x} > x.$$

Tehát az egyenlet bal oldala x-nél nagyobb, míg jobb oldala x, egyenlőség tehát nem teljesülhet. 2 pont

Ha $x > 2015$, akkor $\sqrt{2015\,x} < \sqrt{x^2} = x$ teljesül, amit az előző esettel azonos módon többször felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{x+2014\sqrt{2015\,x}}}}} < x,$$

tehát egyenlőség ebben az esetben sem teljesülhet.

Más lehetőség nincs, tehát az egyenlet megoldásai $x = 0$ és $x = 2015$. 2 pont

---

Összesen: 7 pont