Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
első (iskolai) forduló
Haladók – I. kategória

Feladatok

1. A karácsonyi vásárra a 9.c-sek diós és mákos kifliket készítettek. Mindből kicsit és nagyot is. A karácsonyi vásár végén megmaradt kiflik számairól a következő megállapításokat tették:

$a)$ Összesen 57 darab kifli maradt meg.
$b)$ A mákos kiflik száma osztható 11-gyel.
$c)$ A nagy mákos kiflik száma egyenlő a diós kiflik számával.
$d)$ A legkevesebb a kis diós kifliből van.
$e)$ Minden kifli száma prím.

Határozzuk meg, hogy melyik kifli típusból hány darab maradt meg!

2. Az ABC háromszög csúcsait a köré írt kör O középpontjára tükrözve kapjuk az A', B', C' pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az $AC'BA'CB'$ hatszög oldalainak négyzetösszege egyenlő a középpontnak a háromszög oldalaitól mért távolságai négyzetösszegének nyolcszorosával.

3. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékét a $[-2017; 2016]$ intervallumon:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 24}{3x^2 + 8}.$$

4. Adott az $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = k$ egyenlet, ahol k rögzített valós szám. Mutassuk meg, hogy az egyenletnek minden valós k-ra van megoldása, és az egyik megoldás mindig 1 és 2 közé esik!

5. $a)$ Seholsincs országban 5 város van. Az országban háromféle közlekedési eszközzel lehet utazni, busszal, vonattal és repülővel. Bármely két város között pontosan egy közlekedési eszköz használható közvetlenül. Igaz-e, hogy mindenképp kiválasztható két város és egy közlekedési eszköz úgy, hogy az egyik városból a másik nem elérhető, még átszállásokkal sem, ha csak a kiválasztott eszközt használjuk?

$b)$ Mi volna a helyzet 6 város esetén?