

**Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny**  
**2016/2017-es tanév**  
**3. (döntő) forduló**  
**Kezdők II. kategória**

**Feladatok**

1. Egy  $8 \times 8$ -as négyzetrács (tábla)  $1 \times 1$ -es négyzeteibe (mezőibe) az  $1, 2, \dots, k$  ( $k \leq 64$ ) számokat írjuk valamilyen elrendezésben. Az  $\{1, 2, \dots, k\}$  mezőket együttesen útvonalnak nevezzük. Az útvonal teljes, ha  $k = 64$ , tehát az összes mező ki van töltve. Egy zebra lépked a tábla mezőin a következőképpen:

Tegyük fel, hogy a zebra az  $A$  mezőn áll. A fel, le, balra, jobbra irányok valamelyikében 2 mezőnyi távolságra mozdulva a táblán a zebra az  $A$  mezőből a  $B$  mezőbe érkezik, majd az első irányra merőlegesen a  $B$ -ből 3 mezőnyi távolságra elmozdulva a táblán a  $C$  mezőbe érkezik. Ekkor az  $A$ -ból  $C$ -be lépés a zebra egy szabályos lépése. Például az ábrán látható 1-es mezőből a 2-es mezőbe lépés egy szabályos zebra-lépés, a 2-es mezőből a 3-as mezőbe lépés egy újabb szabályos zebra-lépés.

		1					
					2		

Azt mondjuk, hogy az  $\{1, 2, \dots, k\}$  útvonal zebra-útvonal, ha a zebra az 1-es számú mezőből a 2-es számú mezőbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel, az  $i$ -edik mezőből az  $i + 1$ -edikbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel minden  $1 \leq i \leq k - 1$ -re.

Létezik-e a  $8 \times 8$ -as táblán teljes zebra-útvonal?

2. Legyen az  $ABCDE$  olyan konvex ötszög, melynek oldalaira teljesül, hogy  $AB + CD = BC + DE$ , és az ötszöghöz található olyan  $k$  kör, melynek középpontja az  $AE$  oldalon van, és a kör az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  és  $DE$  oldalakat a  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az  $AE$  és  $PS$  egyenesek párhuzamosak.

3. Legyen  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2017}$ , ahol  $1 \leq n \leq 2017$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ .

Számítsuk ki az  $a_1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2017}^2$  összeg pontos értékét.

**Az eredményhirdetést 2017. május 24-én (szerdán) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).**