

## Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

### Feladatok

1. Egy osztályba 33 diák jár. Minden tanulót megkérdeztünk arról, hogy hány osztálytársának azonos vele a keresztnévének, illetve a vezetéknévének kezdőbetűje. Tanulónként a két-két választ felírva kiderült, hogy 0-tól 10-ig minden szám előfordult a válaszok között. Bizonyítsuk be, hogy biztosan van az osztályban legalább két olyan diák, akinek ugyanazzal a betűvel kezdődik a vezetéknéve és a keresztnéve is!

2. Az  $(a_n)$  véges sorozatra teljesül, hogy  $a_1 = 20$ ,  $a_2 = 5$ , utolsó eleme  $a_k = 0$  és  $2 \leq n < k$  esetén

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \frac{2}{a_n}.$$

Határozzuk meg azt a  $k$  indexet, amire  $a_k = 0$ !

3. Legyen  $ABCD$  egység oldalú négyzet. Az  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  oldalakon jelöljük ki olyan  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  pontokat, hogy  $AP + AS + CQ + CR = 2$ . Bizonyítsuk be, hogy a  $PR$  és  $QS$  szakaszok merőlegesek egymásra!