Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az a_n számtani sorozat elemei pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy ha a sorozat elemei között van négyzetszám, akkor végtelen sok van!

Megoldás. Ha a számtani sorozat differenciája nulla, akkor minden eleme egyenlő. Ebben az esetben nyilván teljesül a feladat állítása. 1 pont

Ha a sorozat differenciája a pozitív egész d, akkor tekintsünk egy olyan a_k elemet, ami négyzetszám, legyen $a_k = b^2$, ahol $b > 0$ egész.

Megmutatjuk, hogy van a sorozatban k-nál nagyobb indexű elem, ami négyzetszám. Ebből következik az állítás. 2 pont

A a_k utáni elemek:

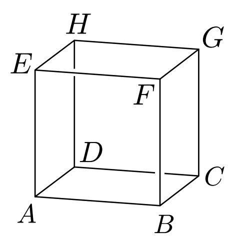
$$a_{k+1} = b^2 + d, \quad a_{k+2} = b^2 + 2d, \quad a_{k+3} = b^2 + 3d, \quad \ldots, \quad a_{k+m} = b^2 + md.$$

Olyan pozitív egész m értéket keresünk, amire $b^2 + md$ négyzetszám. Egy megfelelő választás $m = 2b + d > 0$, 2 pont

ugyanis $b^2 + (2b + d)d = b^2 + 2bd + d^2 = (b + d)^2$. 2 pont

Összesen: 7 pont

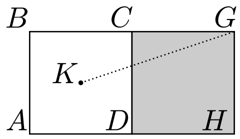
2. Igazoljuk, hogy egy egységélű kocka felületén van olyan pont, melyből a felület bármely másik pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton elérhető, ha csak a kocka felületén haladhatunk!



Megoldás. Jelölje a kocka $ABCD$ lapjának középpontját K! Bebizonyítjuk, hogy K-ra teljesül a feladat állítása. 1 pont

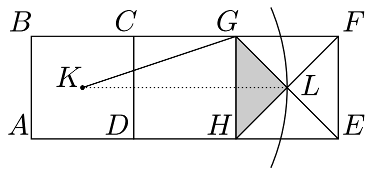
Három esetet különböztetünk meg.

Ha a célpont az $ABCD$ lap pontja, akkor legfeljebb $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2$ távolságra van K-tól. 1 pont



Ha az $ABCD$-vel szomszédos lapok pontjaiba akarunk eljutni, akkor a legnagyobb távolság

$$KG = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} < 2.$$ 2 pont



Végül legyen a célpont az $ABCD$-vel szemközti lapon. A szemközti lapot átlóival négy egybevágó háromszögre bonthatjuk, ezek közül legalább az egyik tartalmazza az elérendő pontot, például GHL. Ekkor a $CGHD$ lapon keresztül elérhető GHL minden pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton.

A KL távolság most pontosan kettő, és a GHL többi pontja közelebb van K-hoz, mint L, mert a K középpontú, KL sugarú kör belsejében tartalmazza a G és H pontokat. $(KG < 2)$ 3 pont

Összesen: 7 pont

3. Igazoljuk, hogy ha az x, y, z valós számokra teljesül az

$$x + y + z = 6 \quad \text{és az} \quad xy + yz + zx = 9$$

egyenlőség, akkor az x, y, z számok mindegyike nemnegatív és nem nagyobb 4-nél.

Megoldás. Az első egyenletből $z = 6 - (x + y)$, így $xy + yz + zx = xy + z(x + y) = 9$ alapján $xy + \big[6 - (x + y)\big](x + y) = 9$. 1 pont

Mivel $xy \leqq \frac{1}{4}(x + y)^2$, hiszen $(x - y)^2 \geqq 0$, ezért

$$\frac{1}{4}(x + y)^2 + \big[6 - (x + y)\big] \cdot (x + y) \geqq 9.$$ 1 pont

Az $(x + y) = 6 - z$ visszahelyettesítéssel $\frac{1}{4}(6 - z)^2 + z(6 - z) \geqq 9$ adódik. 1 pont

A kapott másodfokú egyenlőtlenség nullára rendezett alakja 4-gyel való szorzás után:

$$z^2 - 12z + 36 + 24z - 4z^2 - 36 \geqq 0,$$

azaz $0 \geqq 3z^2 - 12z$. 1 pont

A kapott kifejezés szorzattá alakított formája: $0 \geqq 3z(z - 4)$.

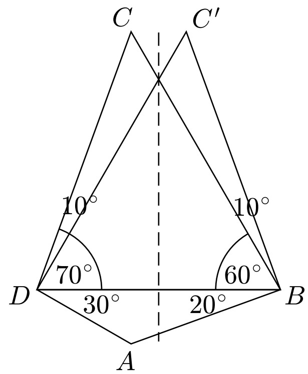
Az egyenlőtlenség megoldása: $0 \leqq z \leqq 4$. 1 pont

Mivel az eredeti egyenletrendszer x, y, z értékeit tekintve szimmetrikus, ezért az adott összefüggések teljesülése esetén $0 \leqq x \leqq 4$, $0 \leqq y \leqq 4$, $0 \leqq z \leqq 4$. 1 pont

Megfelelő $(x; y; z)$ értékhármas meg is adható. Ilyen például az $x = y = 3$, $z = 0$ értékhármas. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az $ABCD$ konvex négyszögben az $ABD\sphericalangle = 20°$, a $DBC\sphericalangle = 60°$, az $ADB\sphericalangle = 30°$, és a $BDC\sphericalangle = 70°$. Bizonyítsa be, hogy a négyszög területe $\frac{1}{2} \cdot (AB \cdot CD + AD \cdot BC)$!



1. megoldás. Tükrözzük a BCD háromszöget BD felező-merőlegesére. 2 pont

A tükrözés miatt $T_{ABCD} = T_{ABC'D}$. 1 pont

$$ADC'\sphericalangle = ADB\sphericalangle + BDC'\sphericalangle = 30° + 60° = 90° \qquad 1 \text{ pont}$$

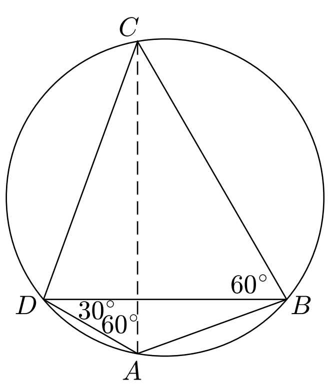
$$\text{és} \quad ABC'\sphericalangle = ABD\sphericalangle + DBC'\sphericalangle = 20° + 70° = 90°. \qquad 1 \text{ pont}$$

Így az $ABC'\triangle$ és az $ADC'\triangle$ is derékszögű, így

$$\left.\begin{aligned} T_{ABC'\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC' = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \quad \text{és} \\ T_{ADC'\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC' = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CB. \end{aligned}\right\} \qquad 1 \text{ pont}$$

Vagyis $T_{ABCD} = T_{ABC'} + T_{ADC'} = \frac{1}{2} \cdot (AB \cdot CD + AD \cdot BC)$. 1 pont

Összesen: 7 pont



2. megoldás. Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, mivel

$$ADC\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 100° + 80° = 180°. \qquad 1 \text{ pont}$$

Így $CAD\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 60°$, mert ugyanazon az íven lévő kerületi szögek. 1 pont

Ezért a DB átló merőleges az AC átlóra. 1 pont

Azaz $T_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$. 1 pont

Viszont Ptolemaiosz tétele szerint egy húrnégyszögben

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \qquad 2 \text{ pont}$$

Ezt helyettesítve a kívánt állításhoz jutunk. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Legyen f egy olyan függvény, ami egész számpárokhoz 1-et vagy -1-et rendel a következő szabályok szerint:

$$f(0,0) = -1,$$
$$f(1,0) = 1$$

és minden (k,l) egész számpárra

$$f(k,l) \cdot f(k+1,l) \cdot f(k,l+1) = 1, \quad \text{valamint}$$
$$f(k,l) \cdot f(k-1,l) \cdot f(k,l-1) = 1.$$

Mennyi $f(2005^2, 2005)$ értéke?

1. megoldás. Ha ismerjük $f(m,n)$ és $f(m+1,n)$ értékét, akkor az első szabály szerint ismerjük $f(m,n+1)$ értékét is ($k=m,\ \ l=n$).

$f(m+1,n)$ és $f(m,n+1)$ viszont meghatározza a második szabály szerint $f(m+1,n+1)$-et ($k=m+1,\ \ l=n+1$).

$f(m+1,n+1)$ és $f(m+1,n)$ az első szabály szerint meghatározza $f(m+2,n)$-et ($k=m+1,\ \ l=n$).

Tehát ezeket összevetve $f(m,n)$ és $f(m+1,n)$ meghatározza $f(m+2,n)$-et.

Innen indukcióval kapjuk, hogy $f(0,0)$ és $f(1,0)$ meghatározza $f(m,0)$ értékét minden pozitív m-re. 2 pont

Ennek az indoklásnak az első lépésében kaptuk, hogy $f(m,0)$ és $f(m+1,0)$ meghatározza $f(m,1)$-et.

Az előzőhöz hasonló okoskodással az is belátható, hogy $f(m,n)$ és $f(m,n+1)$ értéke meghatározza $f(m,n+2)$ értékét, ami az előző megjegyzéssel összevetve azt adja, hogy $f(0,0)$ és $f(1,0)$ meghatározza minden $f(m,n)$ értékét, tehát ha egyáltalán létezik ilyen f függvény, az egyértelmű. 2 pont

Most belátjuk, hogy

$$f(m,n) = \begin{cases} +1 & \text{ha} \quad m-n \quad \text{3-as maradéka 1} \\ -1 & \text{ha} \quad m-n \quad \text{3-as maradéka 0 vagy 2} \end{cases}$$

ez a függvény.

$f(0,0) = -1$ és $f(1,0) = +1$ nyilván teljesül.

A szabályok teljesülését pl. a következő táblázatból lehet leolvasni, ami k és l 3-as maradéka szerint adja meg a megfelelő függvényértékeket:

k	l	$f(k-1,l)$	$f(k,l-1)$	$f(k,l)$	$f(k+1,l)$	$f(k,l+1)$
0	0	-1	$+1$	-1	$+1$	-1
0	1	$+1$	-1	-1	-1	$+1$
0	2	-1	-1	$+1$	-1	-1
1	0	-1	-1	$+1$	-1	-1
1	1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1
1	2	$+1$	-1	-1	-1	$+1$
2	0	$+1$	-1	-1	-1	$+1$
2	1	-1	-1	$+1$	-1	-1
2	2	-1	$+1$	-1	$+1$	-1

2 pont

$2005^2 - 2005 = 2005 \cdot 2004$ osztható 3-mal, így $f(2005^2, 2005) = -1$. 1 pont

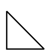
Összesen: 7 pont

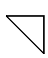
2. megoldás. A függvényt szemléltethetjük úgy, hogy a koordinátarendszer rácspontjaira 1-et vagy (-1)-et írunk, illetve 1 helyett teli, -1 helyett üres karikát rajzolunk. 1 pont

Ekkor a feltételek a következőket jelentik:

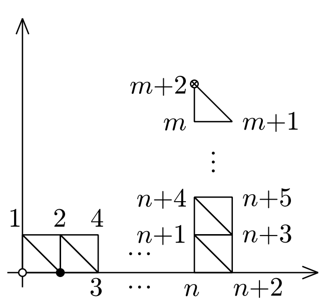
(i) az origóban teli karika van;

(ii) az $(1,0)$ pontban teli karika van;

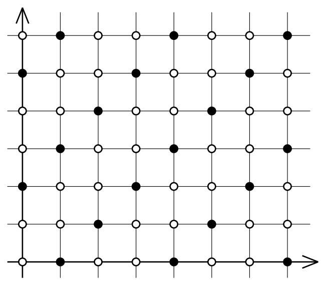
(iii)  ilyen állású egységbefogójú háromszögek csúcsaiban vagy nincs üres karika, vagy 2 van;

(iv)  ugyanez igaz az ilyen állású egységbefogójú derékszögű háromszögekre is. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy ha ilyen háromszögnél két csúcsban ismerjük, hogy üres vagy teli karika van, akkor a harmadik csúcsban is tudjuk, hogy minek kell lennie
(2 üres $\to$ 3. csúcsban teli; 2 teli $\to$ 3. csúcsban teli; 1 üres 1 teli $\to$ 3. csúcsban üres). 1 pont



Két egymás melletti karikából az ábrán látható sorrendet követve bármelyik rácspontban álló karikára következtetni lehet, vagyis ha van egyáltalán a feladat feltételeinek megfelelő függvény, az egyértelmű. 1 pont



Vegyük észre, hogy az ábrán látható periodikus elrendezésnél minden megfelelő állású háromszögben 2 üres és 1 teli karika van, így ez az elrendezés kielégíti a feltételeket. 2 pont

2005^2 hármas maradéka 1, így a $(2005^2, 0)$ pontban teli karika áll. Mivel 2005 hármas maradéka szintén 1, minden teli karikával induló függőleges oszlop 2005-ik helyén üres karika áll, így a $(2005^2, 2005)$ pontban üres karika áll, így $f(2005^2, 2005) = -1$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A második megoldás igazából ugyanaz, mint az első, csak másképpen megfogalmazva. Bármilyen más megoldás természetesen elfogadható, de ha csak arról szól, hogy a feltételeknek megfelelő függvény esetén az érték -1, de nincs említve, hogy valóban van ilyen függvény (tehát, hogy nem ellentmondásosak a feltételek), akkor nem adható maximális pontszám.