Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2005/2006 10. évfolyam 2. kategória 2. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Határozza meg az a, b, c egészek értékét úgy, hogy a következő egyenlőség minden valós x-re teljesüljön:

$$(x-a)\cdot(x-10)+1=(x+b)\cdot(x+c).$$

2. feladat

A t területű, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD, az átlók metszéspontja M, a trapéz körülírt körének középpontja O. A BC oldal felezőpontja E, az AD oldalé pedig F. Bizonyítsuk be, hogy ha $t=m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

3. feladat

Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+4}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

4. feladat

Az (a_n) számsorozatot a következő módon határozzuk meg: $a_1=a$, ahol az „a" szám pozitív egész szám, $n \geq 1$ esetén pedig

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{2}a_n, & \text{ha } a_n \text{ páros szám,} \\ 2a_n+2, & \text{ha } a_n \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a=2^{2006}+5$ esetén a sorozatnak tagja az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike.