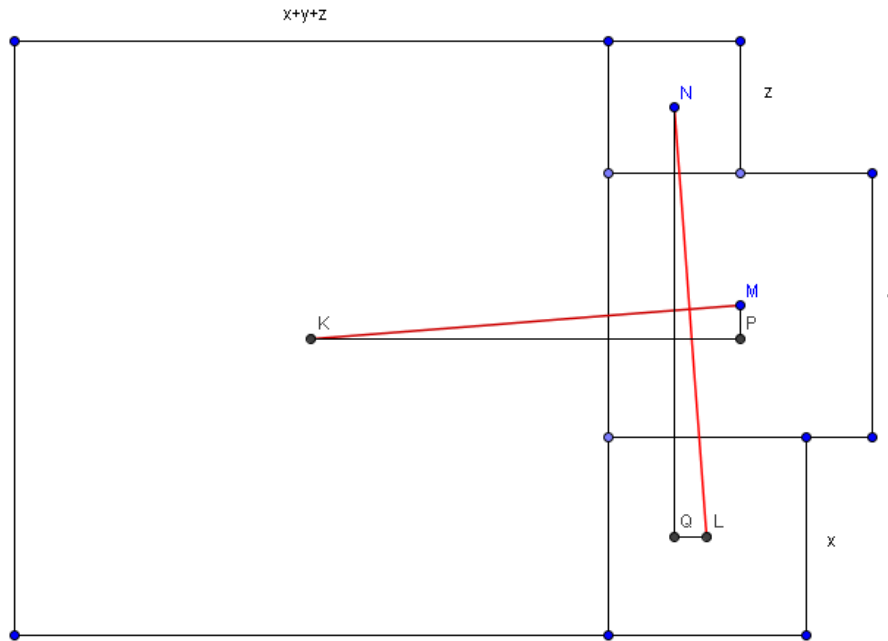


Adh2-3m 0506

1. Egy négyzet egyik oldalára az ábrán látható módon három kisebb négyzetet rajzolunk. Kössük össze a nagy és a középső kis négyzet középpontját, valamint a két szélső négyzet középpontját. Bizonyítsa be, hogy ezek a szakaszok derékszöveget zárnak be!

Mo: A KPM és a QLN derékszögű Δ -ek egybevágók és a befogóik merőlegesek

egymásra. $KP = \frac{x+y+z}{2} + \frac{y}{2} = \frac{z}{2} + y + \frac{x}{2} = NQ$, $MP = x + \frac{y}{2} - \frac{x+y+z}{2} = \frac{x}{2} - \frac{z}{2} = LQ$



2. Milyen n természetes számra igaz, hogy a $4^{2005} + 4^{2006} + 4^n$ összeg értéke négyzetszám?

Mo: $4^{2005} + 4^{2006} + 4^n$ -t írjuk fel két szám összegének négyzeteként.

Az $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ azonosságból mindhárom tag lehet a kétszeres szorzat. Így

$2 \cdot 2^{2005} \cdot 2^{2006} = 4^n$; $2 \cdot 2^{2005} \cdot 2^n = 4^{2006}$; $2 \cdot 2^{2006} \cdot 2^n = 4^{2005}$ egyenletekből az n értéke 2006; 2006; 2003.

2. mo: $n > 2005$ esete $4^{2005}(5 + 4^{n-2005})$ alakból $n=2006$;

$n < 2005$ esete $4^n(5 \cdot 4^{2005-n} + 1)$ alakból $n=2003$ lesz a megoldás.

3. Egy különleges számológép legfeljebb 10-jegyű nemnegatív egész számokkal tud dolgozni. Két művelet van a gépen. Az N művelet négyzetre emel, a T művelet pedig levágja a szám utolsó (egyesek helyén álló) jegyét, ha a szám legalább kétjegyű. Egy alkalommal valaki egy legfeljebb háromjegyű számból kiindulva, több művelet végrehajtása után, a 2 számot kapta eredményül. Mi lehetett a szám?

Mo: A kiindulási szám 1, 10, 100 kivételével az összes többi szám lehetett.

A 1, 10, 100 esetén a műveletekkel csak 10 természetes szám kitevőjű hatványait kaphatjuk.

Egyjegyű számoknál: 2N4N16N256TT; 3N9N81T8N64T6NNTT12NN20736TTTT;
5N25T; 7NT4 már volt;

Nem 1-gyel kezdődő, nem egyjegyű számoknál: 1 vagy 2 TT után egyjegyű szám lesz;
1-gyel kezdődő kétjegyűeknél: 11NT12 már volt; 13NT16 már volt; 14NT19N361TT3
már volt; 15N225TT; 16N256TT; 17N289TT; 18N324TT3 már volt; 19N361TT3 már
volt;

1-gyel kezdődő háromjegyűeknél: 101NTT102NTT104NTT108NTTT11 már volt;
103NTT106NTTT11 már volt; 105NTTT11 már volt; 107NTTT11 már volt;
109NTTT11 már volt; 110-199-nél T után 11-19 lesz, amit már leírtunk.