Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozza meg a következő kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét a valós számok halmazán:

$$K = \frac{x+1}{x^2+1}. \qquad (*)$$

Megoldás. Keressük a K kifejezés (amely a $K(x)$ függvény) értékkészletének legkisebb és legnagyobb elemét.

Átrendezve és 0-ra redukálva a $(*)$ egyenlőséget:

$$Kx^2 - x + K - 1 = 0.$$ 1 pont

Az x-ben másodfokú egyenletben meghatározzuk K paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek legyen megoldása a valós számok halmazán. Ennek feltétele, hogy a diszkrimináns nem negatív:

$$D = 1 - 4K(K-1) \geqq 0.$$ 1 pont

A $-4K^2 + 4K + 1 = 0$ egyenlet gyökei: $K_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ és $K_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. 1 pont

A $-4K^2 + 4K + 1 \geqq 0$ egyenlőtlenség megoldása:

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leqq K \leqq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$ 2 pont

A kifejezés minimuma (az értékkészlet legkisebb eleme) tehát $K_1 = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, maximuma (az értékkészlet legnagyobb eleme) tehát $K_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Tekintsük az $N = 1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + 2006^{2007}$ összeget!

a) Bizonyítsuk be, hogy N nem négyzetszám.

b) Igazoljuk, hogy $N + 4$ nem prímszám.

Megoldás. a) A páratlan számok páros hatványai 4-gyel osztva 1 maradékot adnak, a páros számok hatványai pedig oszthatók 4-gyel. 1 pont

Az N összeg 4-es maradéka így $1003 \cdot 1 + 1003 \cdot 0$, ami a 4-es maradék szempontjából 3-nak felel meg. 1 pont

Viszont egy négyzetszám 4-es maradéka nem lehet 3, ezért N valóban nem lehet négyzetszám. 1 pont

b) Az N összeg 3-as maradékai rendre:

$$1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots .$$

Észrevehető, hogy a maradékok periódusa 6. 1 pont

Annak igazolásáért, hogy $(k+6)^{k+7}$ és k^{k+1} 3-as maradéka megegyezik:

$\big[(k+6)^{k+7}$ és k^{k+7} 3-as maradéka azonos, ezért

$$k^{k+7} - k^{k+1} = k^{k+1}(k^3-1)(k^3+1) = k^{k+1}(k-1)(k+1)(k^2+k+1)(k^2-k+1)\big]. \qquad 1 \text{ pont}$$

$N + 4$ 3-as maradéka így $334 \cdot 2 + 2005^{2006} + 2006^{2007} + 4$, ami 0 maradékot eredményez. 1 pont

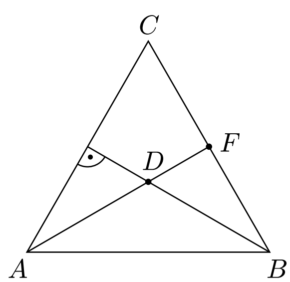
$N + 4$ tehát 3-nál nagyobb, 3-mal osztható szám, ezért nem lehet prímszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

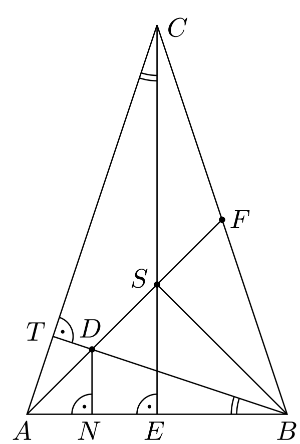
3. Az AB alapú ABC egyenlő szárú háromszög A csúcsból induló súlyvonalát harmadolja a B csúcsból induló magasság. Mekkora szögben látszik a háromszög S súlypontjából az AB alap?

Megoldás. Tekintsük a következő ábrákat:

F BC felezőpontja



1. ábra



2. ábra

Az 1. ábra alapján, ha D az A ponttól távolabbi harmadolópont, akkor az ABC háromszög szabályos. Ekkor D súlypont, és $ADB\sphericalangle = 120°$. 1 pont

A 2. ábra alapján az $AB = c$, $CE = m$ jelöléssel $SE = \frac{m}{3}$ és $AD = DS$ az S súlypont tulajdonsága alapján.

Az AND és AES háromszög hasonlósága alapján $AN = NE = \frac{c}{4}$, továbbá $NB = \frac{3}{4}c$. A hasonlósági arány $2:1$, ezért $DN = \frac{m}{6}$. 1 pont

A BND és CEA háromszögek hasonlósága alapján $\frac{DN}{AE} = \frac{NB}{CE}$, azaz

$$DN = AE \cdot \frac{NB}{CE} = \frac{c}{2} \cdot \frac{\frac{3}{4}c}{m},$$

tehát $DN = \frac{3c^2}{8m}$. 2 pont

Mivel $DN = \frac{3c^2}{8m} = \frac{m}{6}$, ezért $\frac{9}{4}c^2 = m^2$, vagyis $\frac{m}{3} = \frac{c}{2}$. Tehát $SE = AE$. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy az AES háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, ekkor pedig az S súlypontból az AB alap derékszögben látszik.

$$(ASB\sphericalangle = 2 \cdot ASE\sphericalangle = 2 \cdot 45° = 90°.)$$ 1 pont

A súlypontból tehát az alap 120°-os vagy 90°-os szögben látszik. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. A Tour de Hongrie kerékpáros körverseny távja 777 km. A szervezők, hogy megkönnyítsék a versenyzők dolgát, valamennyi résztvevőnek egy olyan kijelzőt adtak, amelyen kilométerenként felvillan a már megtett és a még hátralévő távolság. Tehát az indulás pillanatában $(000; 777)$, a célba érkezéskor $(777; 000)$, közben például $(097; 680)$ látható a kijelzőn.

Hány esetben fordul elő, hogy a kijelzőn felvillanó számsorban nincs két egyforma számjegy?

Megoldás. Legyenek a kijelzőn felvillanó számok $\overline{A_2A_1A_0}$ és $\overline{B_2B_1B_0}$. A számok összege 777. Vegyük először azt az esetet, amikor az összegben nincs tízes átvitel, így minden helyiértéken külön-külön 7-et kell adni a számjegyek összegének.

A feltételnek megfelelő esetekben A_0 a $0, 1, \ldots, 7$ számjegyek bármelyike lehet, ez B_0-t már egyértelműen meghatározza. 1 pont

Így két számjegyet használtunk el, tehát A_1 már csak hatféle számjegy lehet és hasonló gondolatmenettel A_2 már csak négyféle, és ezek egyértelműen meghatározzák B_1-et és B_2-t.

Tehát ha nincs tízes átvitel, akkor $8 \cdot 6 \cdot 4 = 192$ esetben villannak fel a feltételnek megfelelő számok a kijelzőn. 2 pont

Ha van tízes átvitel az összeadás egyes helyiértékén, akkor a tízes helyiértéken már nem lehet átvitel, hiszen az első csak $8+9$-ből adódhatott, így viszont $1+A_1+B_1$ legfeljebb 14 lehet, de 17 kéne, hogy legyen.

Így csak két összeadástípus lehetséges:

$$\begin{aligned} A_0+B_0&=17, \\ A_1+B_1&=6, \\ A_2+B_2&=7, \end{aligned} \qquad \text{vagy} \qquad \begin{aligned} A_0+B_0&=7, \\ A_1+B_1&=17, \\ A_2+B_2&=6. \end{aligned}$$

1 pont

A kívánt összegek lehetséges felbontásai (sorrendtől eltekintve) a következők:

$$\begin{aligned} 17&=9+8, \\ 7&=7+0=6+1=5+2=3+4, \\ 6&=6+0=5+1=4+2. \end{aligned}$$

1 pont

Tehát a 17-et csak egyféleképpen bonthatjuk fel és ez nem csökkenti a 7 és a 6 felhasználható felbontásainak számát. A 7 első felbontásához a 6 utolsó két felbontása tartozhat, a 7 következő két felbontásához a 6 egy-egy felbontása, végül a 7 utolsó felbontásához a 6 első két felbontása. Ez összesen $2+1+1+2=6$ lehetőség. Mivel az összeg tagjainak sorrendje mindkét esetben egymástól függetlenül, kétféleképpen választható, így mindkét összeadástípus egyaránt $6\cdot 2\cdot 2\cdot 2=48$ megoldást ad. 1 pont

Tehát összesen $192+48+48=288$ esetben villannak fel a feltételnek megfelelő számok a kijelzőn. 1 pont

---

Összesen: 7 pont