Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje a_n a $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \binom{2n}{5}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját! Mennyit ér az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2007}\}$ halmaz legnagyobb eleme?

Megoldás. Egyszerű számolással kapjuk a sorozat első néhány elemét.

$$\begin{aligned}
&a_1 = 2,\\
&a_2 = (4,4) = 4,\\
&a_3 = (6,20,6) = 2,\\
&a_4 = (8,56,56,8) = 8,\\
&a_5 = (10,120,252,120,10) = 2.
\end{aligned}$$

Látható, hogy a_n mindig kettőhatvány. Először ezt bizonyítjuk. Megmutatjuk, hogy a

$$\binom{2n}{1},\ \binom{2n}{3},\ \binom{2n}{5},\ \ldots,\ \binom{2n}{2n-1}$$

számok összege kettőhatvány. Mivel a legnagyobb közös osztó a számok összegének is osztója, ebből következik, hogy a legnagyobb közös osztó is kettőhatvány.

A binomiális együtthatók ismert tulajdonságai alapján

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \ldots + \binom{2n}{2n-1} =$$

$$= \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} + \binom{2n-1}{3} + \ldots +$$

$$+ \binom{2n-1}{2n-2} + \binom{2n-1}{2n-1} = 2^{2n-1}.$$ 2 pont

Most megmutatjuk, hogy a_n a $\binom{2n}{1} = 2n$ szám legnagyobb kettőhatvány osztója. Elég igazolni, hogy ha $2n = 2^k \cdot m$, ahol m páratlan, akkor 2^k osztója az összes felsorolt binomiális együtthatónak. Legyen $1 < q < 2n$ egy páratlan szám.

$$\binom{2n}{q} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \ldots \cdot (2n-q+1)}{q!} = \binom{2n-1}{q} \cdot \frac{2n}{2n-q}\,.$$

Mivel $2n$-et egy páratlan számmal osztottuk és egy egésszel szoroztuk, az eredmény (amiről tudjuk, hogy egész) osztható $2n$ legnagyobb kettőhatvány osztójával. 3 pont

A keresett maximum az előbbiek szerint a $2, 4, 6, 8, 10, \ldots, 2 \cdot 2007$ számok osztói között előforduló legnagyobb kettőhatvány, ami a 2048. ($a_{1024} = 2048$). 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Tekintsük azokat a háromszögeket, amelyeknek oldalai $n-1, n, n+1$, ahol n 2-nél nagyobb egész szám! Ha t_n jelöli az egyes háromszögek területét, akkor bizonyítsuk be, hogy a $\{t_n\}$ sorozat bármely tagjának végtelen sok egész számú többszöröse is tagja a sorozatnak.

Megoldás. Például a Heron-féle területképlet alapján a háromszög t területe:

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{ahol} \quad s = \frac{3n}{2},$$

így

$$t_n = \sqrt{\frac{3n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)} = \frac{n}{4} \cdot \sqrt{3(n^2-4)}. \qquad \text{1 pont}$$

A t_n-re kapott kifejezés tovább alakítható:

$$t_n = \frac{n}{4}\sqrt{3(n^2-4)} = \frac{n}{4}\sqrt{3\left[(n+2)^2-4n-8\right]} = \frac{n}{4}\sqrt{3\left[(n+2)^2-4(n+2)\right]}. \qquad \text{1 pont}$$

Az $n+2 = k^2$ $(n = k^2-2)$ jelöléssel ekkor $n > 2$ és $k > 2$ esetén

$$t_{k^2-2} = \frac{k^2-2}{4} \cdot \sqrt{3(k^4-4k^2)} = \frac{k^2-2}{4} \cdot k \cdot \sqrt{3(k^2-4)}. \qquad \text{2 pont}$$

De $t_k = \frac{k}{4}\sqrt{3(k^2-4)}$, így $t_{k^2-2} = (k^2-2) \cdot \frac{k}{4} \cdot \sqrt{3(k^2-4)}$, azaz $t_{k^2-2} = (k^2-2) \cdot t_k$. 1 pont

Mivel pedig k értékére $k \geqq 3$ teljesül, ezért bármely megfelelő k értékre $t_{k^2-2} > t_k$, ahol a k érték rendre (végtelen sokszor) (k^2-2)-re cserélhető, ezzel pedig a feladat állítását igazoltuk. 2 pont

Összesen: 7 pont

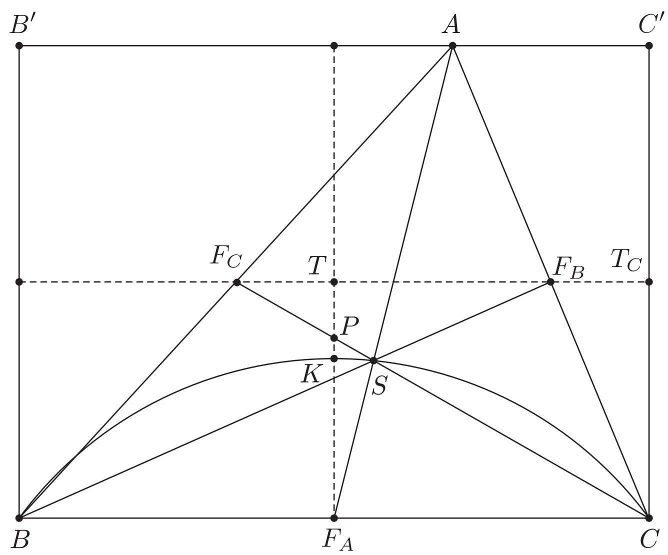
3. Az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja S, az AB és AC oldalak felezőpontja X és Y. Tudjuk, hogy az AXY és BCS háromszögek köréírt köre érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög magasságpontját és köréírt körének középpontját összekötő szakasz merőleges az A-ból induló súlyvonalra!

Megoldás. Jelölje a BCS háromszög köréírt körét k, az AXY köréírt körét pedig k_0! Megmutatjuk, hogy k és k_0 a háromszög súlypontjában érintik egymást.

Alkalmazzunk a BCS háromszögre és köréírt körére S középpontú, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot, és jelöljük k képét k_1-gyel. A hasonlóságnál B képe Y, C képe X, és k_1 érinti k-t az S pontban.

Mivel mind k_0, mind k_1 átmegy az X és Y pontokon, továbbá mindketten érintik kívülről a k kört, ezért csak $k_0 = k_1$ lehetséges. Tehát k_0 a súlypontban érinti k-t. Ezt kétféle módon is részletezzük. Mindkét megoldásban szerepet kap a következő segédtétel:

Segédtétel: *Ha az ABC hegyesszögű háromszög súlypontja S, akkor a BC-vel párhuzamos középvonal egyenesének és a BCS háromszög körülírt körének nincs közös pontja.*



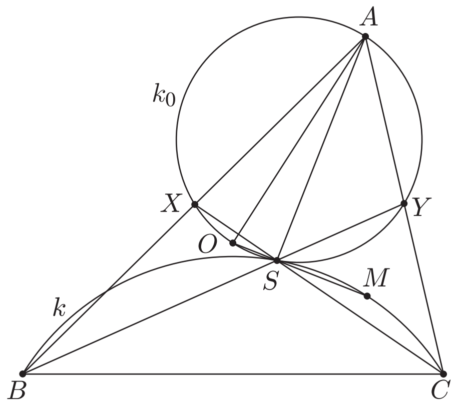
A segédtétel bizonyítása: A BC-re B-ben és C-ben állított merőlegesek, továbbá az A-n át a BC-vel húzott párhuzamos egy $BCC'B'$ téglalapot határoznak meg. Mivel ABC hegyesszögű, az A pont a $B'C'$ szakasz belső pontja.

A BCS köréírt körének „legmagasabb” pontja (a BC felezőmerőlegesén lévő pont) K. Azt mutatjuk meg, hogy K a BC-vel párhuzamos középvonal „alatt” van. (A „fel” és „le” irányokról a BC-hez viszonyítva beszélünk.)

Elég igazolnunk, hogy K a TF_A szakasz belső pontja, ahol T a téglalap középpontja, F_A pedig a BC oldal felezőpontja. Ha $AB = AC$ akkor az állítás nyilvánvaló, mert T az A-ból induló súlyvonal felezőpontja, $K = S$ pedig az alsó harmadolópont. A továbbiakban tegyük fel, hogy $AB > AC$.

A középvonal ismert tulajdonsága miatt $F_CF_B = TT_C = \frac{1}{2}BC$, ezért T az F_CF_B középvonal belső pontja. Emiatt a CF_C súlyvonal egy T alatti P pontban metszi BC felezőmerőlegesét. Továbbá a k kör CSB íve C-től S-ig a CF_C súlyvonal felett, S-től B-ig pedig a súlyvonal alatt halad. Az $AB > AC$ feltevés miatt S a BC felezőmerőlegesétől C felé esik, tehát a CSB körív és a felezőmerőleges K metszéspontja a súlyvonal P pontja alatt van.

Mivel az F_BF_C középvonal párhuzamos a BC oldallal, ezért k-nak és a középvonal egyenesének nem lehet közös pontja. (Például a k kör K-beli érintője elválasztja őket egymástól.)



$k_0 = k_1$ **1. bizonyítása.** Ismert szerkesztési feladat, hogy adott kört (k_a) érintő és két adott (P és Q), a körön kívüli ponton áthaladó kört kell szerkeszteni. Egy lehetséges megoldás: Képzeljük el, hogy megszerkesztettük a k_m megoldást. Ekkor egy P-n és Q-n átmenő, k_a-t két pontban metsző k_s segédkör segítségével megszerkeszthető a k_a, k_m, k_s körök H hatványpontja. H-ból érintőket húzva k_a-hoz, az érintési pontok éppen azok a pontok, ahol k_m érintheti k_a-t.

A két érintési ponthoz egy-egy megoldás tartozik, ezek közül az egyik egyenessé fajulhat, ha a PQ egyenes érinti k_a-t. Ha a PQ egyenes nem metszi k_a-t, akkor a két megoldáskör közül az egyik magában foglalja, a másik pedig kívülről érinti k_a-t.

Eredeti feladatunkban ez a helyzet, az XY egyenes nem metszi k-t, tehát csak egy olyan X-en és Y-on átmenő kör létezik, ami kívülről érinti k-t, így $k_0 = k_1$.

$k_0 = k_1$ **2. bizonyítása.** Mivel k_1 és k érintik egymást az S pontban, a k kör minden S-től különböző P pontjára $XPY\sphericalangle < XSY\sphericalangle$, a kerületi szögek tétele miatt. (Itt is felhasználjuk, hogy XY nem metszi k-t, vagyis k teljes egészében az XY által meghatározott félsíkok egyikében, az S-et tartalmazóban van.) Ha k_0 egy S-től különböző Q pontban érintené k-t, akkor $XQY\sphericalangle > XSY\sphericalangle$ teljesülne, ez pedig ellentmond az előző megállapításnak.

Tehát csak $k_0 = k_1$ lehetséges. 3 pont

Befejezés. Vegyük észre, hogy k_0 megkapható az ABC háromszög köréírt köréből, A középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítéssel, ezért ABC köréírt körének O középpontja illeszkedik k_0-ra, és OA a k_0 átmérője. 2 pont

Thalész tétele miatt $OSA\sphericalangle = 90^\circ$, és ismert, hogy az M magasságpont rajta van az OS egyenesén, tehát $OM \perp AS$. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A megoldásból az is következik, hogy a háromszög M magasságpontja rajta van a k körön, hiszen az S középpontú, -2 arányú hasonlóság S-et M-be, k_0-t pedig k-ba viszi. Tehát az ABC rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy a B, C, S, M pontok egy körön vannak.

Az ilyen háromszögeknek még rengeteg érdekes tulajdonsága van. Igaz rájuk többek között, hogy

(a) $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$;

(b) a BCS köréírt körét BC-re tükrözve az ABC körülírt körét kapjuk.