# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2007/2008-as tanév
# 2. (döntő) forduló
# haladók III. kategória

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** A $v_1$ számnégyes az $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ pozitív egész számokból áll, ahol $v_1 = (a_1; b_1; c_1; d_1)$, és $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ egyike sem nagyobb 2008-nál. A $v_2$ rendezett számnégyes: $v_2 = (a_2; b_2; c_2; d_2)$, ahol $a_2 = |a_1 - b_1|$, $b_2 = |b_1 - c_1|$, $c_2 = |c_1 - d_1|$, $d_2 = |d_1 - a_1|$. Teljesen hasonló módon a $v_{n+1}$ számnégyes képzési szabálya $v_{n+1} = (a_{n+1}; b_{n+1}; c_{n+1}; d_{n+1})$ esetén $a_{n+1} = |a_n - b_n|$, $b_{n+1} = |b_n - c_n|$, $c_{n+1} = |c_n - d_n|$, $d_{n+1} = |d_n - a_n|$. Bizonyítsuk be, hogy $v_{2008} = (0; 0; 0; 0)$!

**Megoldás.** Azt fogjuk belátni, hogy $v_{50} = (0; 0; 0; 0)$, amiből feladatunk állítása nyilvánvalóan következik.

A bizonyításhoz felhasználjuk a következő két (nyilvánvaló) állítást:

(I.) A $v_n = (a_n; b_n; c_n; d_n)$ előállításban a maximális elem, azaz $\max(a_n, b_n, c_n, d_n)$ nem kisebb, mint $\max(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1})$, hiszen $a_{n+1} \leqq \max(a_n, b_n)$, $b_{n+1} \leqq \max(b_n, c_n)$, $c_{n+1} \leqq \max(c_n, d_n)$ és $d_{n+1} \leqq \max(d_n, a_n)$ minden $n \geqq 1$ esetén.

(II.) Ha az $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ számok legnagyobb közös osztója $q$, akkor állításunk igazolásához elegendő a $v_n(a_n; b_n; c_n; d_n)$ számnégyes helyett a $v_n'\left(\frac{a_n}{q}; \frac{b_n}{q}; \frac{c_n}{q}; \frac{d_n}{q}\right)$ számnégyest vizsgálni, azaz $q$-val leoszthatók a számnégyes tagjai.

Vizsgáljunk most meg paritás szempontjából egy tetszőleges számnégyest! A képzési szabályt is figyelembe véve a következő esetek lehetségesek:

$a)$ $(p; p; p; p)$, $b)$ $(p; p; p; pl)$, $c)$ $(p; p; pl; pl)$, $d)$ $(p; pl; p; pl)$, $e)$ $(pl; pl; pl; p)$, $f)$ $(pl; pl; pl; pl)$, ahol $p$ páros számot jelöl, $pl$ pedig páratlan szám ($p \geqq 0$; $pl \geqq 1$).

Megmutatjuk, hogy mind a hat esetben legfeljebb 4 lépésből eljuthatunk a $(p; p; p; p)$ esethez, azaz ekkor helyettesíthető a számnégyes (II.) alapján a $\left(\frac{p}{2}; \frac{p}{2}; \frac{p}{2}; \frac{p}{2}\right)$ négyessel.

$a)$: a helyettesítés közvetlenül adódik.

$b)$: $(p; p; p; pl) \to (p; p; pl; pl) \to (p; pl; p; pl) \to (pl; pl; pl; pl) \to (p; p; p; p)$.

$c)$: $(p; p; pl; pl) \to (p; pl; p; pl) \to (pl; pl; pl; pl) \to (p; p; p; p)$.

$d)$: $(p; pl; p; pl) \to (pl; pl; pl; pl) \to (p; p; p; p)$.

$e)$: $(pl; pl; pl; p) \to (p; p; pl; pl) \to (p; pl; p; pl) \to (pl; pl; pl; pl) \to (p; p; p; p)$.

$f)$: $(pl; pl; pl; pl) \to (p; p; p; p)$.

Tehát legfeljebb négy lépés után a kapott számnégyes maximális tagja a többi taggal együtt páros szám lesz, így minden tag a felére csökkenthető.

Ez pedig azt jelenti, hogy a 4. lépés után a maximális elem legfeljebb $\frac{2008}{2}$ értékű, a 8. lépés után $\frac{2008}{2^2}$, a 12. lépés után $\frac{2008}{2^3} = 251$, a 16. lépés után a maximális elem legfeljebb 125, ezért a 20. lépés után a maximális elem legfeljebb 64.

Eljárásunkat ilyen módon folytatva $v_{49} = (a; a; a; a)$ alakú, ahol $a \in \mathbb{N}$, ahonnan pedig $v_{50} = (0; 0; 0; 0)$, így $v_{2008}$ is $(0; 0; 0; 0)$ alakú.

*Megjegyzés:* Már $v_{45}$ is $(0; 0; 0; 0)$ alakú, hiszen ha $v_i$ maximális elemét $\overline{v}_i$ jelöli, akkor $\overline{v}_1 \leqq 2008$, $\overline{v}_5 \leqq 1004$, $\overline{v}_9 \leqq 502$, $\overline{v}_{13} \leqq 251$, $\overline{v}_{17} \leqq 125$, $\overline{v}_{21} \leqq 62$, $\overline{v}_{25} \leqq 31$, $\overline{v}_{29} \leqq 15$, $\overline{v}_{33} \leqq 7$, $\overline{v}_{41} \leqq 1$, így $\overline{v}_{45} = 0$. Tehát $v_n(0; 0; 0; 0)$, ha $n \geqq 45$.

Összesen: 7 pont

**2.** Határozzuk meg az összes pozitív egészekből álló $(x; y)$ számpárt, ami kielégíti az alábbi egyenletet:
$$y^2(x-1) = x^5 - 1.$$

**Megoldás.**
$$\begin{aligned} y^2(x-1) &= x^5 - 1, \\ y^2(x-1) &= (x-1)\bigl(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\bigr). \end{aligned}$$

$x = 1$ esetén minden pozitív egész $y$ megoldása az egyenletnek. Ha $x > 1$, akkor az

$$(*) \qquad y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

megoldásait keressük.

$x = 2$-t behelyettesítve nem kapunk újabb megoldást:
$$y^2 = 2^5 - 1 = 31.$$

$x = 3$-t behelyettesítve:
$$2y^2 = 3^5 - 1.$$

$y = 11$ adódik, így a $(3, 11)$ számpár is megoldása az egyenletnek.

Tegyük fel, hogy $x > 3$ és megoldása az egyenletnek. Ekkor $x + 1 < \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$.

Ezt felhasználva becsüljük $y^2$-t felülről:
$$y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 < x^4 + x^3 + x^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right)^2,$$
$$y^2 < \left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right)^2.$$

**1. variáció:**

$$y < \left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right).$$

$y \leqq x^2 + \dfrac{x}{2}$, mivel $x, y \in \mathbb{Z}^+$. Mivel $x$ pozitív, ezért $\dfrac{x^2}{4} < x^2 + x + 1$, így

$$y^2 \leqq \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} < x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

$y^2 < y^2$, ami ellentmondás. Azaz ha $x$ megoldás, akkor $x \leqq 3$.

**2. variáció:**

Mivel $x$ pozitív, ezért $\dfrac{x^2}{4} < x^2 + x + 1$, így

$$\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4} < x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2.$$

Azaz $\left(x^2 + \dfrac{x}{2}\right)^2 < y^2$.

Nyilván $\left(x^2 + \dfrac{x-1}{2}\right)^2 < \left(x^2 + \dfrac{x}{2}\right)^2$. Így

$$\left(x^2 + \frac{x-1}{2}\right)^2 < y^2 < \left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right)^2.$$

Mivel $x, y \in \mathbb{Z}^+$, ezért

$$(**) \qquad \left(x^2 + \frac{x-1}{2}\right) < y < \left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right).$$

Ha $x$ páratlan, akkor $(**)$-ban a két zárójelben két szomszédos egész áll, így nem eshet közéjük egész $y$.

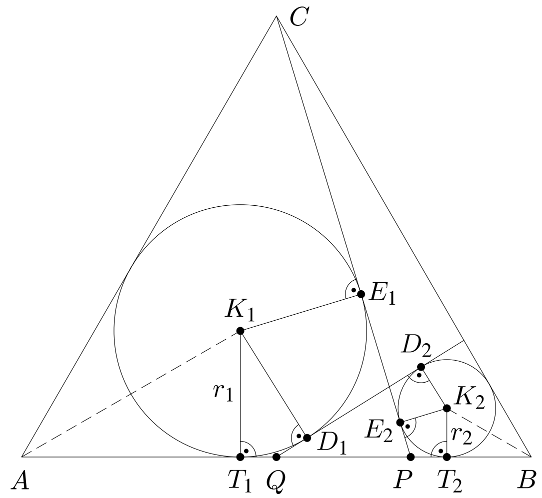
Ha $x$ páros, akkor $y = x^2 + \dfrac{x}{2}$ lehetne, de ezt $(*)$-ba visszaírva $0 = \dfrac{3}{4}x^2 + x + 1$ adódik, ami pozitív egész $x$-re nem teljesül.

---

Összesen: 7 pont

**3.** Az $ABC$ szabályos háromszög $AB$ oldalának a felezőpontjától különböző tetszőleges belső pontja $P$. Az $APC$ háromszög beírt köre $k_1$, a $BPC$ háromszög beírt köre $k_2$. A $k_1$ és $k_2$ körnek a $PC$ egyenestől különböző közös belső érintője a $Q$ pontban metszi az $AB$ szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy a $Q$ pont helyzete független $P$ megválasztásától!

**Megoldás.** A következő *ábra* jelöléseit fogjuk használni:




Az egyszerűség kedvéért feltehető, hogy $AB = BC = CA = 2$. Ekkor a háromszög magasságai $\sqrt{3}$ hosszúak.

Ha $F$ az $AB$ szakasz felezőpontja, akkor az $FP = p$, $CP = q$ jelölésekkel Pitagorasz tétele alapján $q^2 = 3 + p^2$, illetve $p^2 = q^2 - 3$.

Feltehetjük továbbá a $CF$ egyenesre vonatkozó szimmetria alapján, hogy $0 < p < 1$.

Az $APC$ háromszögből az érintőszakaszok hosszára vonatkozó összefüggés alapján $AT_1 = \dfrac{3+p-q}{2}$, hasonlóan a $BCP$ háromszögből $BT_2 = \dfrac{3-p-q}{2}$.

Összefüggéseinkből $T_1T_2 = 2 - AT_1 - BT_2 = q - 1$.

Mivel $QT_1 = QD_1$, hiszen a $k_1$ körhöz húzott érintőszakaszok, ugyanígy $PT_1 = PE_1$, ezért a $QT_1 = u$ jelöléssel

$$(*) \qquad QT_1 = QD_1 = u = T_1T_2 - QT_2 = q - 1 - QT_2.$$

$PT_2 = PE_2$ a $k_2$ körhöz húzott érintőszakaszok, így

$$PT_2 = PE_2 = PB - BT_2 = 1 - p - \frac{3-p-q}{2} = \frac{q-p-1}{2}.$$

A $k_1$ és $k_2$ körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hossza miatt $D_1D_2 = E_1E_2$ és $QT_2 = QD_2$, így

$$(**) \qquad u = q - 1 - QT_2 \quad \text{alapján} \quad u = q - 1 - QD_2, \quad \text{azaz}$$

$$(***) \qquad u = q - 1 - (u + E_1E_2), \quad \text{tehát} \quad 2u = q - 1 - E_1E_2.$$

De $E_1E_2 = PE_1 - PE_2 = PE_1 - PT_2$, ezért $PE_1 = PT_1$ alapján

$$E_1E_2 = PT_1 - \frac{q-p-1}{2}.$$

Így pedig $2u = q - 1 - E_1E_2$ szerint

$$2u = q - 1 - PT_1 + \frac{q-p-1}{2}, \quad \text{ahol} \quad PT_1 = 1 + p - \frac{3+p-q}{2} = \frac{p+q-1}{2}.$$

Ekkor pedig $2u = q - 1 - \dfrac{p+q-1}{2} + \dfrac{q-p-1}{2} = q - p - 1$, azaz $u = \dfrac{q-p-1}{2}$.

Ha pedig $u = \dfrac{q-p-1}{2}$, akkor

$$AQ = AT_1 + u = \frac{3+p-q}{2} + \frac{q-p-1}{2} = 1,$$

ami azt jelenti, hogy $Q$ $P$-től függetlenül az $AB$ oldal $F$ felezőpontja.

Összesen: 7 pont

## A 3. feladat általánosítása

**Feladat.** Egy $ABC$ háromszög $AB$ oldalának belső pontja $P$, az $ACP$ és $BCP$ háromszögek beírt köre $k_1$ és $k_2$. A $k_1$ és $k_2$ körök $CP$-től különböző $e$ közös belső érintője az $AB$ oldalt a $Q$ pontban metszi.

Bizonyítsuk be, hogy $Q$ nem függ a $P$ helyzetétől!

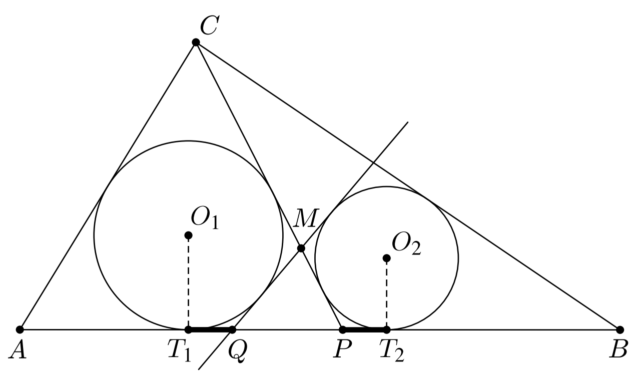
**Megoldás.** Kiszámoljuk $AQ$ hosszát.

Bevezetjük a következő jelöléseket: $s(ABC)$ jelöli az $ABC$ háromszög félkerületét, továbbá $s = s(ABC)$, $s_1 = s(APC)$, $s_2 = s(BCP)$, $s_3 = s(PMQ)$, ahol $M$ a $CP$ és $e$ metszéspontja, $T_1$ és $T_2$ pedig a beírt körök érintési pontjai $AB$-n.

Felhasználjuk a következő ismert összefüggéseket:

($*$) Ha egy $XYZ$ háromszög $XY$ oldalához hozzáírt köre a $ZX$ oldal meghosszabbítását $W$-ben érinti, akkor $ZW = s(XYZ)$.

($**$) Ha egy $XYZ$ háromszög beírt köre az $XY$ oldalt $W$-ben érinti, akkor $XW = s(XYZ) - YZ$.




Vegyük észre, hogy $T_1Q = PT_2$, hiszen ($*$)-ot kétszer alkalmazva az $MQP$ háromszögre: $T_1P = QT_2 = s_3$, innen a közös $QP$ szakaszt levonva következik az állítás.

Végül egyszerű számolással:

$AQ = AT_1 + T_1Q = AT_1 + PT_2 =_{(**)} s_1 - CP + s_2 - CB = s_1 + s_2 - CP - CB = s - CB$,

ami valóban nem függ a $P$ megválasztásától.