Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A minden valós számra értelmezett $f(x)$ függvényre $f(x+1)+3\cdot f(-x)=|x|$ teljesül. Adjuk meg $f(x)$ zérushelyeit!

Megoldás. Az $f(x)$ függvényt meghatározó képletbe próbáljunk meg „szimmetrikus” helyettesítési értékeket behelyettesíteni!

Az $x=u-1$ helyettesítéssel $f(u)+3f(1-u)=|u-1|$. 1 pont

Ha $x=-u$, akkor $f(1-u)+3f(u)=|u|$. 1 pont

Az

$$\left.\begin{aligned} f(u)+3f(1-u)&=|u-1| \\ 3f(u)+\ \ f(1-u)&=|u| \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása $f(u)=\dfrac{1}{8}\cdot\big(3|u|-|u-1|\big)$. 2 pont

Mivel $u\in\mathbb{R}$, így az $u=x$ visszahelyettsítéssel az $f(x)=\dfrac{1}{8}\cdot\big(3|x|-|x-1|\big)$ zérushelyeit kell meghatározni.

Tehát a $3|x|=|x-1|$ egyenletet kell megoldani. 1 pont

Az adott egyenlet gyökei $x_1=-\dfrac{1}{2}$, 1 pont

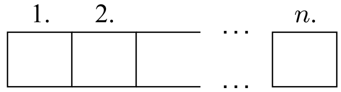
valamint $x_2=\dfrac{1}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy körlapot n darab körcikkre osztottunk, a cikkeket 1-től n-ig számozva, ahol $n\geqq 2$. Hányféleképpen színezhetők ki a számozott körcikkek úgy, hogy a szomszédos körcikkek színe különböző legyen, ha legfeljebb három adott színt használhatunk a színezéshez?

(Egy körcikk egyszínű a színezés során.)

Megoldás. Oldjuk meg először a feladatot egymáshoz csatlakozó n darab téglalapra:



de lehetne n darab egymáshoz csatlakozó körcikk is úgy, hogy az első és az utolsó ne rendelkezzen közös határvonallal.

Ha a_n jelöli azoknak a színezéseknek a számát, amelyekben az 1. és az n. tartomány színe azonos, b_n pedig azoknak a színezéseknek a számát, amelyekben a két adott mező színe különböző, akkor

$$(*) \qquad a_n + b_n = 3 \cdot 2^{n-1}, \qquad \text{1 pont}$$

hiszen az első mező színe 3-féle lehet, az összes többié pedig 2-féle.

Állítjuk, hogy $b_{n+1} = 2a_n + b_n$. 1 pont

Állításunk helyes, mert „a_n”-ből kétféleképpen lehet „b_{n+1}” típusú előállítás, míg „b_n”-ből egyféleképpen. 1 pont

Mivel $b_{n+1} = 2a_n + b_n$, ezért $(*)$ alapján $b_{n+1} = 3 \cdot 2^n - b_n$. 1 pont

Nekünk az eredeti feladat szerint b_n értékét kell megadni, hiszen az n darab tartományt össze kell „hajtogatni” úgy, hogy az első és az utolsó tartomány csatlakozzon egymáshoz.

A $b_{n+1} = 3 \cdot 2^n - b_n$ képzési szabály alapján $n \geqq 2$ esetén $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $b_3 = 6$, $b_4 = 18$, $b_5 = 30$, $b_6 = 66$, $b_7 = 126$, $\ldots$

A kiszámított tagok értéke alapján sejthető, hogy

$$b_n = 2^n + 2 \cdot (-1)^n. \qquad \text{1 pont}$$

A sejtés a teljes indukció módszerével $b_{n+1} = 3 \cdot 2^n - b_n$ alapján könnyűszerrel igazolható. Az igazolásért: 2 pont

---

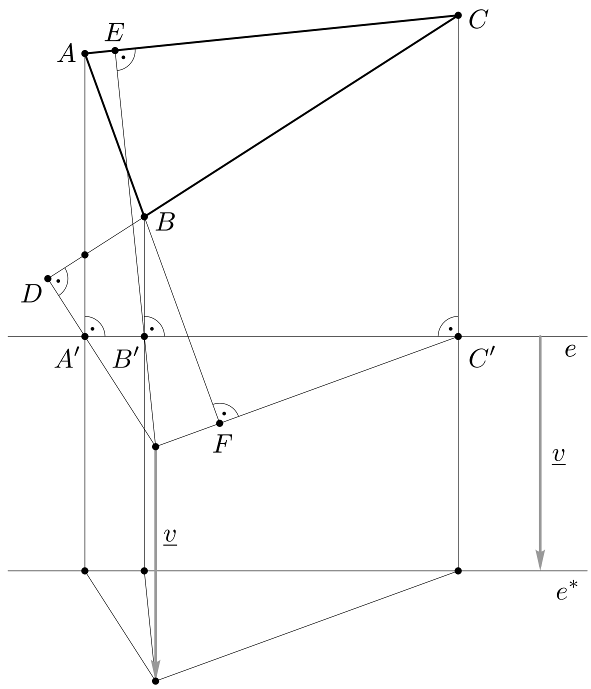
Összesen: 7 pont

3. Adott egy ABC háromszög és egy e egyenes a háromszög síkjában. A háromszög csúcsainak merőleges vetületei az e egyenesen A', B' és C'. Az A' ponton át húzott és BC-re merőleges egyenes m_A, a B'-n át haladó és AC-re merőleges egyenes m_B, végül a C'-n át húzott AB-re merőleges egyenes m_C.

Bizonyítsuk be, hogy az m_A, m_B és m_C egyenesek egy ponton mennek át!

Megoldás. Először néhány észrevételt teszünk, amelyek egyszerűbbé teszik a bizonyítást.

1. észrevétel: Ha valamilyen e egyenesre teljesül, hogy m_A, m_B és m_C egy ponton halad át, továbbá $e^* \parallel e$, akkor az e^* egyeneshez tartozó m_A^*, m_B^* és m_C^* egyenesek is egy ponton mennek át.

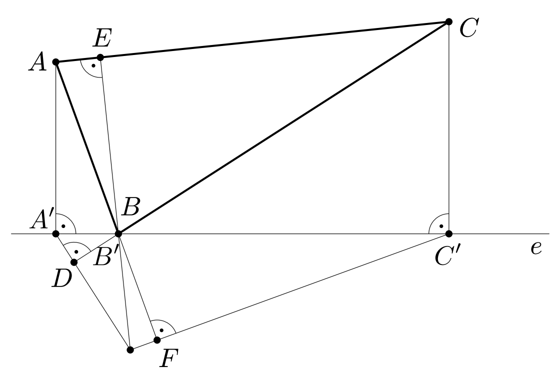


Az ábráról könnyen leolvasható, hogy ha az e-t egy $\underline{v}$ vektorral való eltolás viszi e^*-ba, akkor az m_A, m_B és m_C egyenesek is $\underline{v}$-vel eltolva mennek át m_A^*, m_B^* és m_C^* egyenesekbe, tehát az eredeti hármas pontosan akkor megy át egy ponton, amikor a három eltolt egyenes. 1 pont

2. észrevétel: Ha az ABC háromszög valamelyik oldala e-re merőleges, akkor m_A, m_B és m_C közül valamelyik kettő egybeesik, a harmadik pedig nem párhuzamos velük, így nyilvánvaló az állítás.

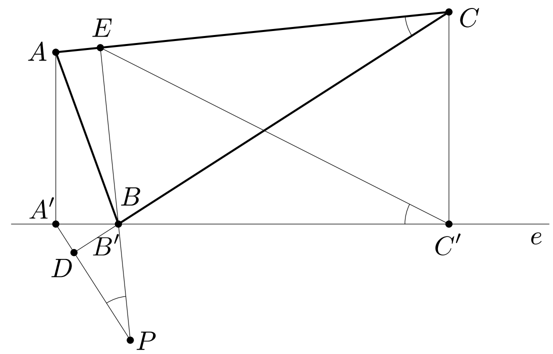
3. észrevétel: Ha az ABC háromszög valamelyik oldala e-vel párhuzamos, akkor toljuk el e-t úgy, hogy képe a vele párhuzamos oldalegyenessel fedésbe kerüljön. Ebben a helyzetben m_A, m_B és m_C a háromszög három magasságvonala, így ismét nyilvánvaló az állítás. 1 pont

A továbbiakban feltesszük, hogy e a háromszög egyik oldalával sem párhuzamos, és egyikre sem merőleges. Az 1. észrevétel alapján elég arra az esetre bizonyítani, amikor e átmegy a háromszög egyik csúcsán.



Azt fogjuk megmutatni, hogy m_A és m_B P metszéspontja azonos m_B és m_C Q metszéspontjával.

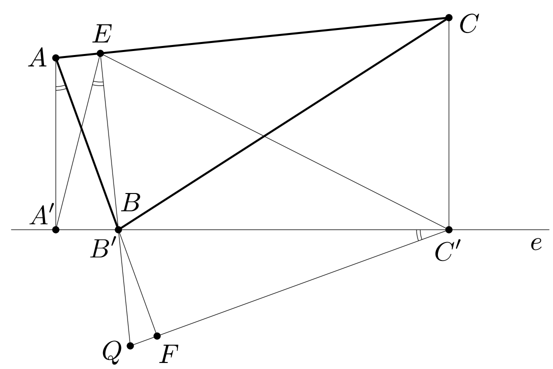
Az ábra jelöléseit használjuk:



$A'PB'\sphericalangle = ACB'\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. $ACB'\sphericalangle = EC'B'\sphericalangle$, mert $ECC'B'$ húrnégyszög.

Tehát $A'B'P_\Delta \sim EB'C'_\Delta$. Innen $\dfrac{B'P}{A'B'} = \dfrac{B'C'}{EB'}$, vagyis $B'P = \dfrac{A'B' \cdot B'C'}{EB'}$. 2 pont

Teljesen hasonlóan jellemezhető a Q pont is.



$B'C'Q\sphericalangle = A'AB'\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. $A'AB'\sphericalangle = A'EB'\sphericalangle$, mert $A'AEB'$ húrnégyszög.

Tehát $A'EB'_\Delta \sim QB'C'_\Delta$. Innen $\dfrac{B'Q}{C'B'} = \dfrac{A'B'}{EB'}$, vagyis $B'Q = \dfrac{A'B' \cdot B'C'}{EB'}$. 2 pont

Azt kaptuk, hogy $B'P = B'Q$. Mivel P és Q is az EB'egyenesen, az $A'C'$ azonos oldalán fekszik, innen $P = Q$ következik. Ezzel beláttuk, hogy a feladat állításában szereplő egyenesek egy ponton mennek át. 1 pont

---

Összesen: 7 pont