Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

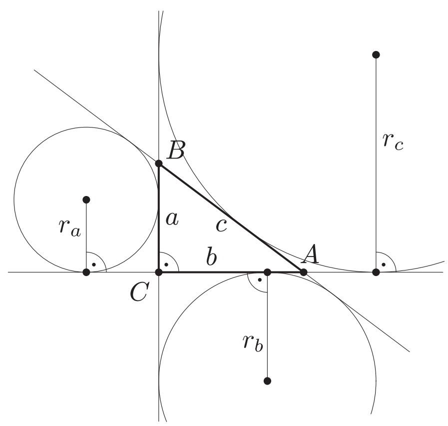
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy derékszögű háromszög egyik oldalához hozzáírt körének sugara a háromszög egyik oldalának hosszával egyezik meg. Igazoljuk, hogy a háromszög valamelyik oldala a másik két oldal számtani közepe.

Megoldás.

Tekintsük a következő ábrát:



$a \leqq b < c$

Ábránk jelölései alapján ismert összefüggések szerint

$$r_a = \frac{a-b+c}{2}, \qquad r_b = \frac{-a+b+c}{2}, \qquad r_c = \frac{a+b+c}{2}.$$ 1 pont

A háromszög-egyenlőtlenségek alapján $r_a < a$, $r_b < b$ és $r_c > c$.

Az előbbiek alapján igaz, hogy $r_a < a \leqq b$, $r_a < a < c$ és $a < c < r_c$, valamint $b < c < r_c$.

Mivel $r_b < b < c$, ezért csak $r_b = a$ lehetséges. 1 pont

Ekkor viszont $\dfrac{-a+b+c}{2} = a$, azaz $c = 3a - b$. 1 pont

Pitagorasz tétele alapján $c^2 = (3a-b)^2$, továbbá $a^2 + b^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$, ahonnan $0 = 6a\left(\dfrac{4}{3}a - b\right)$ adódik. 2 pont

Egyenletünk megoldása $b = \dfrac{4}{3}a$, így $c = \dfrac{5}{3}a$. 1 pont

Ekkor pedig $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{a + \frac{5}{3}a}{2} = \dfrac{4}{3}a = b$, ami állításunkat igazolja. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az x, y, z valós számokra $x+y+z=9$ és $x^2+y^2+z^2=33$ teljesül. Melyek azok az $(x;y;z)$ számhármasok, amelyekre az yz szorzat értéke a lehető legnagyobb, illetve a lehető legkisebb?

Megoldás. Mivel $z = 9-(x+y)$, ezért $x^2+y^2+z^2=33$ alapján

$$x^2+y^2+81-18(x+y)+x^2+2xy+y^2=33.$$

A kapott egyenlet y szerint rendezett alakja: $y^2+(x-9)y+x^2-9x+24=0$.

Megoldás akkor lehet, ha a kapott egyenlet D diszkriminánsa:

$$D=-3x^2+18x-15=-3(x-1)(x-5)$$

nemnegatív. Ekkor pedig $1 \leqq x \leqq 5$. 1 pont

A feltételi egyenletekből $y+z=9-x$ és $y^2+z^2=33-x^2$ alapján

$$yz=\frac{1}{2}\big((y+z)^2-\left(y^2+z^2\right)\big)=x^2-9x+24, \quad \text{azaz} \quad yz=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

adódik. 2 pont

Minimum akkor lehet, ha $yz=\dfrac{15}{4}$, ekkor $x=\dfrac{9}{2}$.

$x=\dfrac{9}{2}$ esetén valóban minimum van, mégpedig az

x	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$
y	$\frac{9-\sqrt{21}}{4}$	$\frac{9+\sqrt{21}}{4}$
z	$\frac{9+\sqrt{21}}{4}$	$\frac{9-\sqrt{21}}{4}$

esetekben. 2 pont

Az $yz=x^2-9x+24$ másodfokú függvénynek az $x\in[1;5]$ intervallumon maximuma az intervallum szélső pontjában lehet. 1 pont

Ez a maximum $x=1$ esetén valósul meg.

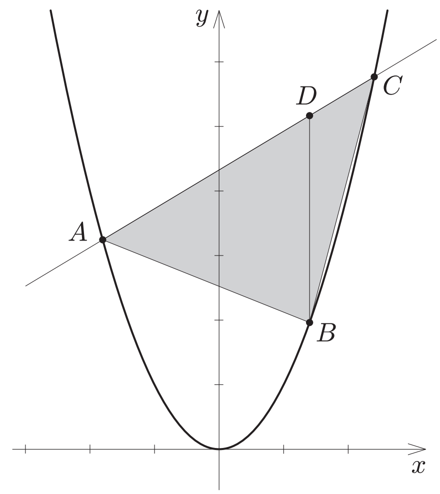
Ekkor $(x;y;z)=(1;4;4)$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Tekintsük az $y = x^2$ függvény grafikonját, és ezen vegyünk fel három rácspontot: A-t, B-t és C-t! (Rácspont: mindkét koordinátája egész.) Lehet-e az így meghatározott háromszög területe 2010?

Megoldás. Azt bizonyítjuk, hogy nincs ilyen rácsháromszög.

Használjuk a lentebbi ábrát! Legyenek a, b, c az A, B, C pontok x koordinátái. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $a < b < c$. Ekkor A, B, C koordinátái: $A\big(a; a^2\big)$, $B\big(b; b^2\big)$, $C\big(c; c^2\big)$. Mivel $y = x^2$ függvény konvex, az AC egyenese a B pont „fölött” halad. Legyen D az a pont, amely rajta van AC-n és x koordinátája b!



$\overrightarrow{AC}\big(c - a; c^2 - a^2\big)$ miatt AC meredeksége: $m = c + a$. Ekkor AC egyenlete $y = m \cdot x + t$ alakú, ahol t azt jelöli, hogy AC hol metszi az y-tengelyt. Akár A, akár C pont két koordinátáját behelyettesítve kijön, hogy $t = -a \cdot c$ alakú, vagyis az AC egyenlete $y = (a + c) \cdot x - a \cdot c$ alakú.

Ekkor D pont koordinátái: $D\big(b; (a + c)b - a \cdot c\big)$.

Számoljuk ki az ABC háromszög területét úgy, hogy külön-külön kiszámoljuk az ABD és a BCD területet és összeadjuk őket! Mindkét részháromszögnél a közös BD oldallal és a hozzá tartozó („vízszintes”) magasságokkal fogjuk kiszámolni a területet.

A BD távolság $(a+c)b - ac - b^2 = ab - b^2 + cb - ca = b(a - b) + c(b - a) = (c - b)(b - a)$ alakú. Így az ABC háromszög területe:

$$T = \frac{1}{2}(b - a)(c - b)(b - a) + \frac{1}{2}(c - b)(c - b)(b - a).$$

Ha ez utóbbi alak két tagjából a közös tényezőket kiemelem:

$$T = \frac{1}{2}(c - b)(b - a)\big((c - b) + (b - a)\big) = \frac{1}{2}(c - a)(c - b)(b - a).$$

Pontozás: összesen eddig 4 pont.

Vagyis a háromszög területére a $T = \dfrac{1}{2}(c - a)(c - b)(b - a)$ képlet adódott.

Innentől csak az a kérdés, hogy a $2010 = \dfrac{1}{2}(c - a)(c - b)(b - a)$, vagyis a

$$4020 = (c - a)(c - b)(b - a)$$

egyenlet megoldható-e az egész számok körében.

Azt fogjuk megmutatni, hogy az egyenlet nem megoldható. Ugyanis tekintsük a $4020 = 67 \cdot 60$ felbontást! A 67 prím, így a prímtulajdonság, és

$$4020 = 67 \cdot 60 = (c - a)(c - b)(b - a)$$

miatt 67 osztja $(c-a)$, $(c-b)$, $(b-a)$ valamelyikét. Mivel $a<b<c$ a $(c-a)$, $(c-b)$, $(b-a)$ egész számok közül a $(c-a)$ a legnagyobb, így csak $67 \mid (c-a)$ lehet. (Mivel egyébként $60 \geqq (c-a)$ lenne, s így nem $(c-a)$ lenne a legnagyobb.) 1 pont

$67 \mid (c-a)$, így ($a<b<c$, és így $(c-a)$, $(c-b)$, $(b-a)$ pozitív egészek) $67 \leqq (c-a)$. Mivel $(c-a)=(c-b)+(b-a)$, így $67 \leqq (c-b)+(b-a)$. De akkor (megint $(c-a)$, $(c-b)$, $(b-a)$ pozitív egész volta miatt) a $(c-b)(b-a)$ szorzat legkisebb értéke $1 \cdot 66 = 66$. 1 pont

Vagyis eddig azt kaptuk, hogy $67 \leqq (c-a)$, és $66 \leqq (c-b)(b-a)$, de akkor

$$(c-a)(c-b)(b-a) \geqq 67 \cdot 66 > 67 \cdot 60 = 4020,$$

ami éppen azt jelenti, hogy az $4020 = (c-a)(c-b)(b-a)$ egyenlet valóban nem megoldható az egész számok körében.

Ezzel igazoltuk, hogy nem létezik a megfelelő rácsháromszög, és ez volt a célunk. 1 pont

Összesen: 7 pont