

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Az ABC háromszög beírt köre az AC és BC oldalakat az X és Y pontokban érinti. A B -ből induló belső szögfelező az XY szakaszt P -ben metszi. Mekkora az $\angle APB$?

2. 2013 valós számra fennáll:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_{2012} \geq a_{2013} \geq 0, \quad \text{valamint}$$

$$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \dots + a_{2013}^2 \geq \frac{61}{4}.$$

Igazoljuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2012} + a_{2013} \geq \sqrt{2013}$!

Lehet-e a fenti 2013 tagú összeg pontosan $\sqrt{2013}$?

3. Artúr király udvarába hivatalos vendégségbe néhány lovag. Bármely két lovag vagy barát, vagy ellenség (a viszonyok kölcsönösek, és az idő múlásával nem változnak).

Egy korábbi vendégség során ugyanezek a lovagok le tudtak ülni két asztal mellé úgy, hogy az egy asztalnál ülők mind barátai voltak egymásnak.

A mostani vendégség során a vendégek egyesével érkeztek meg. Érkezésük után minden érkező leült az egyik olyan asztalhoz, ahol nem ült ellensége; az ilyen asztalok közül azt választva, ahol a legtöbb barátja ült (ha egyetlen megfelelő asztal sem volt, akkor az érkező természetesen új asztalhoz ült). Így összesen 12 asztal mellé ültek le lovagok.

Legalább hány lovag érkezett a vendégségbe?