Haladók III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az x, y, z *pozitív egész* számokról tudjuk, hogy *relatív prímek,* és $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x \cdot y \cdot z$ négyzetszám!

2. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 körök A-ban és B-ben metszik egymást. Az A-n átmenő közös szelőjük a köröket még C és D pontokban is metszi. (C k_1-en, D k_2-n van.) A CO_1 és DO_2 egyenesek metszéspontja M. Igazoljuk, hogy O_1, O_2, M és B egy körön vannak.

3. Egy $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ halmaz *súlyán* a benne lévő számok szorzatát értjük.

(Vagyis pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaz súlya: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.)

Tekintsük a $H = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{2014}\right\}$ halmazt! Mennyi H összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege?

(Ez pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaznál $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$ lenne.)

Megoldások és javítási útmutató

1. Az x, y, z *pozitív egész* számokról tudjuk, hogy *relatív prímek,* és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x \cdot y \cdot z$ négyzetszám!

(*Megjegyzés.* Sajnos az eredeti kitűzésben lemaradt a kikötés, hogy a számok pozitív egészek. Ha negatív egészeket is megengedünk, az állítás már nem igaz: $x = -3$, $y = -6$, $z = -2$ megoldás, és $xyz = -36$ nem négyzetszám.)

Megoldás. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$-t xyz-vel szorozva kapjuk, hogy $yz + xz = yx$.

Legyen x és y legnagyobb közös osztója d. Ekkor $x = d \cdot a$ és $y = d \cdot b$ alakba írható úgy, hogy $(a, b) = 1$.

Beírva a fenti egyenletbe:

$$abz + daz = d^2ab,$$
$$(a + b)z = dab,$$
$$z = d \cdot \frac{ab}{a + b}.$$

A legnagyobb közös osztó tulajdonságaiból adódik, hogy

$$(a, b) = (a, a + b) = (b, a + b) = 1 \Rightarrow (ab, a + b) = 1.$$

Mivel $z = d \cdot \frac{ab}{a + b}$ és d és z egész, ezért d felírható $k \cdot (a + b)$ alakban, ahol k egész.

Így $z = kab$,

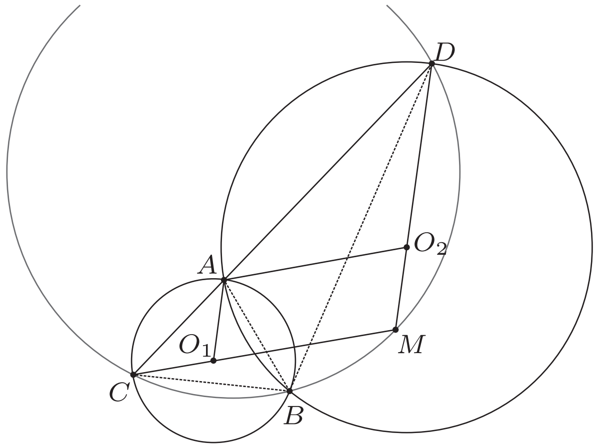
$$x = ka(a + b),$$
$$y = kb(a + b).$$

Mivel $(x, y, z) = 1$, ezért szükségszerűen $k = 1$. Így $x = a(a + b)$, $y = b(a + b)$, $z = ab$.

Azaz $xyz = \big(ab(a + b)\big)^2$, ami négyzetszám.

2. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 körök A-ban és B-ben metszik egymást. Az A-n átmenő közös szelőjük a köröket még C és D pontokban is metszi. (C k_1-en, D k_2-n van.) A CO_1 és DO_2 egyenesek metszéspontja M. Igazoljuk, hogy O_1, O_2, M és B egy körön vannak.

1. megoldás. Először megmutatjuk, hogy C, B, M és D egy körön vannak. Használjuk az alábbi ábra elrendezését és vezessük be a következő szögeket: $ABC\sphericalangle = \gamma$, $ABD\sphericalangle = \delta$.



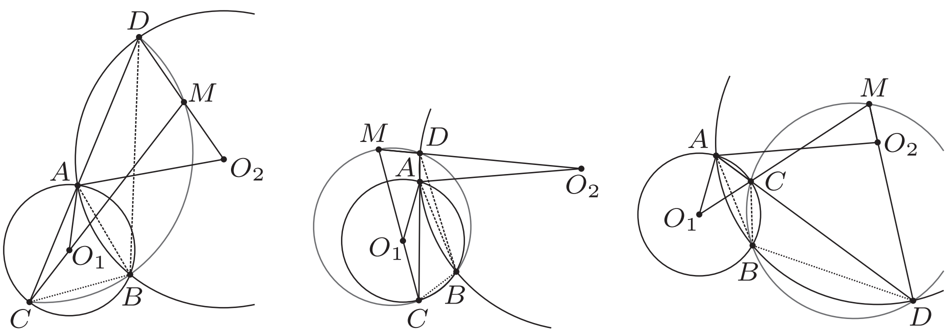
A kerületi és középponti szögek tétele szerint $AO_1C\sphericalangle = 2\gamma$, $AO_2D\sphericalangle = 2\delta$. Az ACO_1 és ADO_2 egyenlőszárú háromszögekben $CAO_1\sphericalangle = 90^\circ - \gamma$ és $DAO_2\sphericalangle = 90^\circ - \delta$, emiatt $O_1AO_2\sphericalangle = \gamma + \delta$.

$AO_1M\sphericalangle = 180^\circ - 2\gamma$, $AO_2M\sphericalangle = 180^\circ - 2\delta$, ezért az AO_1MO_2 négyszögben

$$O_1MO_2\sphericalangle = 360^\circ - (180^\circ - 2\gamma) - (180^\circ - 2\delta) - (\gamma + \delta) = \gamma + \delta.$$

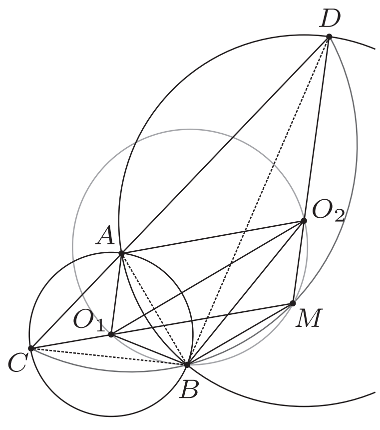
Azt kaptuk, hogy $CBD\sphericalangle = CMD\sphericalangle$, vagyis C, B, M, D egy körön vannak.

Megjegyzés: C helyzetétől függően több különböző elrendezés lehetséges. A fenti érvelés kis módosítással a többi elrendezés esetén is elmondható. Lényeges eltérések két helyen vannak: Az A pont nem feltétlenül választja el egymástól a C és D pontokat, illetve az M pont és a B pont kerülhet az O_1O_2 egyenes különböző oldalára is. Utóbbi esetben nem $O_1MB\sphericalangle = O_1O_2B\sphericalangle$, hanem $O_1MB\sphericalangle = 180^\circ - O_1O_2B\sphericalangle$ bizonyítandó.



A folytatásban az első ábra alapján dolgozunk tovább. A C, B, M, D pontokat tartalmazó kört k_3-nak nevezzük. A kerületi szögek tételét fogjuk többször alkalmazni, mindig jelölve, hogy melyik körben.

Azt fogjuk megmutatni, hogy $O_1MB\sphericalangle = O_1O_2B\sphericalangle$.



$$O_1MB\sphericalangle = CMB\sphericalangle \quad \text{(szögszár meghosszabbítása);}$$
$$CMB\sphericalangle = CDB\sphericalangle \quad \text{(KSZT } k_3\text{);}$$
$$CDB\sphericalangle = ADB\sphericalangle \quad \text{(szögszár meghosszabbítása);}$$
$$AO_2B\sphericalangle = 2 \cdot ADB\sphericalangle \quad \text{(KSZT } k_2\text{);}$$
$$O_1O_2B\sphericalangle = \frac{1}{2} \cdot AO_2B\sphericalangle = ADB\sphericalangle \quad (O_1O_2 \text{ felezi az } AO_2B\sphericalangle\text{-et).}$$

Az egyenlőségeket végigkövetve pont a bizonyítandó $O_1MB\sphericalangle = O_1O_2B\sphericalangle$ összefüggést kaptuk.

2. megoldás. A most következő (jóval egyszerűbb) megoldás előnye (egyszerűségén túl), hogy *irányított szögekkel* is működik, ezért nem kell különböző eseteket vizsgálni. A megoldásban (bizonyítás nélkül) felvázoljuk az irányított szögek felhasznált tulajdonságait.

Most is egy lemmával kezdünk.

Lemma. *Ha a k_1 és k_2 körök két metszéspontja A és B, továbbá a B végpontú átmérő másik végpontja a két körben X és Y, akkor X, Y és A egy egyenesre esnek.*

Bizonyítás. A Thalesz-tétel miatt $BAX\sphericalangle = BAY\sphericalangle = 90°$, ebből a pontok sorrendjétől függetlenül következik, hogy X, Y és A egy egyenesen van.

Most tegyük fel, hogy a feladatban szereplő CD szelő φ szöget zár be XAY-nal. A folytatásban a szögeket $XAC\sphericalangle$ helyett $\measuredangle XAC$ módon fogjuk jelölni, mert *irányított szögekkel* dolgozunk. Az irányított szögeket előjelesen, és modulo 180° mérjük. (Tehát például $30° = -150°$.) Az irányított szögek megoldásunkban felhasznált tulajdonságai az alábbiak:

1. Ha A, M, B és C, M, D kollineáris, akkor $\measuredangle CMA = \measuredangle DMB$.
2. $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$.
3. Ha a k kör kerületi pontja P, íve AB, középpontja O, akkor $2 \cdot \measuredangle APB = \measuredangle AOB$.

4. $\measuredangle APB = \measuredangle AQB \Leftrightarrow A, B, P, Q$ egy körön vagy egy egyenesen van.

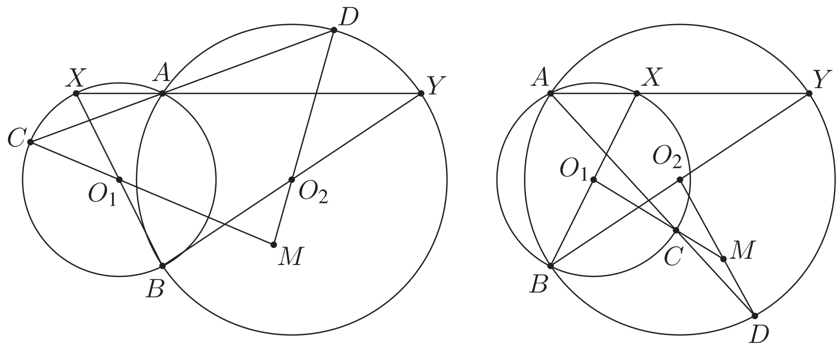
Most már egységesen kezelve az összes esetet, a következő egyszerű megoldást adhatjuk a feladatra:

$$\measuredangle XAC = \measuredangle YAD,$$

$$2 \cdot \measuredangle XAC = \measuredangle XO_1C = \measuredangle BO_1M \quad \text{és}$$

$$2 \cdot \measuredangle YAD = \measuredangle YO_2D = \measuredangle BO_2M.$$

Tehát $\measuredangle BO_1M = \measuredangle BO_2M$, amiből következik, hogy B, M, O_1, O_2 egy körön vannak, mert B, O_1, O_2 nem kollineáris.



$\measuredangle MO_1B = \measuredangle CO_1X = 2\measuredangle CAX = 2\measuredangle DAY = \measuredangle DO_2Y = \measuredangle MO_2B$

3. Egy $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ halmaz *súlyán* a benne lévő számok szorzatát értjük.

(Vagyis pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaz súlya: $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.)

Tekintsük a $H = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots; \frac{1}{2014}\right\}$ halmazt! Mennyi H összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege?

(Ez pl. az $A = \{2; 3; 5\}$ halmaznál $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$ lenne.)

Megoldás. Önkényesen tekintsük az üres halmaz súlyát 1-nek! (Ez később látszódni fog, hogy nem is olyan önkényes.)

Legyen
$A = H$ összes páratlan elemszámú részhalmazai súlyainak összege, és
$B = H$ összes páros elemszámú (az üreshalmazzal együtt) részhalmazai súlyainak az összege.

Nyilván $C = A + B = H$ összes részhalmazai súlyainak az összege.

Nekünk $B - 1$-re van szükségünk.

Lemma: *Ha $K = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$, akkor K összes részhalmazai súlyainak összege (az üres halmaz 1-es súlyával együtt):*

$$S = (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$

Bizonyítás: Nyilvánvaló. Az n db ( ) felbontása után éppen egy 2^n tagú összeget kapunk, melyben ott van egyszer az 1-es (üreshalmaz súlya), másfelől az összes lehetséges $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k}$ szorzat (az összes lehetséges $\{a_{i_1}; a_{i_2}; \dots ; a_{i_k}\}$ részhalmaz súlya).

Vagyis most nálunk $H = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots ; \frac{1}{2014}\right\}$ esetén:

$$C = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{2014}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2015}{2014} = \frac{2015}{2}.$$

Vagyis A, és B számok segítségével: $A + B = \frac{2015}{2}$.

Másfelől tekintsük a $H' = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \dots ; -\frac{1}{2014}\right\}$ halmazt.

Erre a H' összes részhalmazának a súlya:

$$C' = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{2014}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}.$$

Most vizsgáljuk meg, hogy miből is tevődik össze C'!

Legyen itt is
$A' = H'$ összes páratlan elemszámú részhalmazai súlyainak összege, és
$B' = H'$ összes páros elemszámú (az üreshalmazzal együtt) részhalmazai súlyainak az összege.

Nyilván egyfelől $C' = A' + B'$, másfelől $B' = B$; hiszen H' egy páros elemszámú részhalmazának a súlya megegyezik H azon páros elemszámú részhalmazának a súlyával, amely éppen a megfelelő H'-beli részhalmaz ellentettjeit tartalmazza.

$A' = -A$ (hasonlóan, mint az imént $B' = B$-nél).

De akkor A, B-re a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left\{\begin{aligned} A + B &= \frac{2015}{2} \\ -A + B &= \frac{1}{2014} \end{aligned}\right. \quad \to \quad 2B = \frac{2015}{2} + \frac{1}{2014} \quad \to \quad B = \frac{2015}{4} + \frac{1}{4028}.$$

Mivel ebben a B-ben benne van az üreshalmaz 1-es súllyal, a válasz:

H összes páros elemszámú (legalább két elemet tartalmazó) részhalmazai súlyainak az összege:

$$B - 1 = \frac{2011}{4} + \frac{1}{4028}.$$