Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelynek bármely két szomszédos jegye különböző és a számjegyek összege 2013? (6 pont)

Megoldás. Bármely két szomszédos számjegy összegének a lehető legnagyobbnak kell lennie, hogy a szám a lehető legkevesebb számjegyből álljon.

Ez az összeg – mivel két szomszédos számjegy különböző – $9 + 8 = 17$. (3 pont)

$2013 = 17 \cdot 118 + 7$, ezért a kérdezett legkisebb szám legalább $2 \cdot 118 + 1 = 237$ jegyű, és akkor a legkisebb, ha az első jegye a 7.

Ezért a kérdezett legkisebb szám: $78989\ldots 89$, ami egy 237 jegyű szám, az első számjegye 7, ezután 118-szor 89 következik. (3 pont)

2. Egy 34 fős osztályban ugyanannyi fiú van, mint lány. Igaz-e, hogy ha leülnek egy kerek asztal köré, akkor minden esetben lesz olyan diák, akinek mindkét szomszédja lány? (6 pont)

Megoldás. Az osztályban 17 fiú és 17 lány van. Tegyük fel, hogy létezik az osztálynak olyan leültetése, mely esetén nincs olyan diák, aki két lány között ül. Emiatt minden diáknak legalább az egyik szomszédja fiú. Tehát közvetlenül egymás mellett legfeljebb két lány ülhet, míg minden fiú mellett legalább még egy fiúnak ülnie kell. (3 pont)

Mivel $17 = 8 \cdot 2 + 1$, ezért a lányok a kör alakú asztalt legalább 9 olyan ívre osztják, amelyek mindegyikén legalább két fiúnak kell ülnie. Ekkor viszont a fiúk száma legalább 18 kell, hogy legyen, ami ellentmondás. Tehát mindig lesz olyan diák, akinek mindkét szomszédja lány. (3 pont)

3. Az a, b pozitív valós számokra az $a + b$, $a - b$, ab és $\dfrac{a}{b}$ kifejezések értéke növekvő sorrendben $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{4}{3}$ és $\dfrac{7}{4}$. Melyik ez a két szám? (6 pont)

Megoldás. Mivel a négy érték között nincs negatív szám, ezért $a > b$, és így, $\dfrac{a}{b} > 1$, tehát $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$, vagy $\dfrac{a}{b} = \dfrac{7}{4}$. (2 pont)

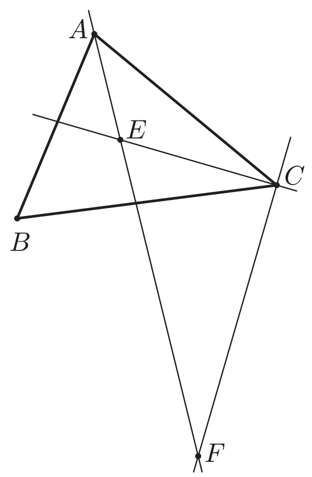
Ha $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4}{3}$, akkor $\dfrac{a+b}{a-b}=7$. A maradó három tört közül csak $\dfrac{7}{4}:\dfrac{1}{4}=7$, tehát $a+b=\dfrac{7}{4}$.
Ezért, $a=1$, $b=\dfrac{3}{4}$. (2 pont)

Ha $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{4}$, akkor $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{11}{3}$, ami nem szerepel a maradó három tört arányai között.

Ezért az egyetlen megoldás $a=1$, $b=\dfrac{3}{4}$ és ezek kielégítik a feladat feltételeit. (2 pont)

4. Az ABC háromszögben a B csúcsnál lévő szög $60°$-os. Az A csúcshoz tartozó belső szögfelezőt a C csúcshoz tartozó belső, illetve külső szögfelező rendre az E, illetve F pontban metszi. Mekkora az EC és az FE szakaszok hosszának aránya? (6 pont)

Megoldás. Készítsünk *ábrát!*



Mivel AE belső és CF külső szögfelező, $CAE\sphericalangle=\dfrac{\alpha}{2}$ és $FCB\sphericalangle=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Így:

$$AFC\sphericalangle=180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma=\frac{\beta}{2}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Tudjuk, hogy $\beta=60°$, ezért $EFC\sphericalangle=30°$.

Az ugyanazon csúcshoz tartozó belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, így az ECF háromszög félszabályos, amiből következik, hogy $EC:FE=1:2$. (3 pont)