Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
2. (döntő) forduló
Haladók III. kategória

Feladatok

1. Adott ABC háromszög esetén a QRS háromszöget nevezzük az ABC háromszög *kölyök-háromszögének,* ha az igaz, hogy

– QP_1 felezőpontja R,

– RP_2 felezőpontja S,

– SP_3 felezőpontja Q, ahol a P_1, P_2, P_3 pontok valamilyen sorrendben az A, B, C pontok.

Igazoljuk, hogy minden ABC háromszögnek két kölyök-háromszöge van, és a két kölyök-háromszög metszetének a területe az ABC háromszög területének az 1/10-e.

2. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem konstans függvényről azt tudjuk, hogy minden valós x esetén

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = c,$$

ahol c rögzített egész konstans.

Igazoljuk, hogy ha $f(x)$-nek van egész fixpontja, akkor van két olyan fixpontja is, amely nem egész.

(z fixpontja $f(x)$-nek, ha $f(z) = z$.)

3. Egy kör alakú asztal körül 20 diák ül. Minden diák előtt van néhány cukorka, kezdetben 2, 4, 6, 8, …, 38, 40, valamilyen tetszőleges sorrendben. A diákok – tanáruk vezetésével – a következőt teszik. Egy lépésben minden diák odaadja a tőle jobbra ülő diáknak cukorkái felét, majd ha így páratlan sok cukorkája maradna, akkor a tanártól kap még egyet. Ezt a lépést ismételgetik újra és újra. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után minden diáknak ugyanannyi cukorkája lesz.

Az eredményhirdetést 2016. május 25-én (szerdán) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).