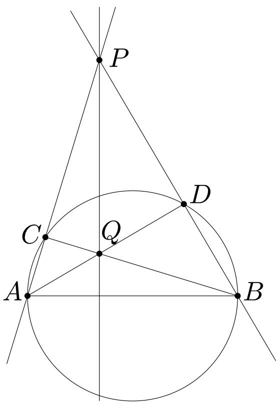
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
Kezdők I–II. kategória II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiken kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P, az AD és BC egyeneseké pedig Q. Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel? (6 pont)

Megoldás. $a)$ Készítsünk ábrát!



1 pont

A Thalész-tétel miatt az $ACB\sphericalangle$ és az $ADB\sphericalangle$ derékszög. 2 pont

Ennek következtében az APB háromszögben AD és BC magasságvonalak. 1 pont

Így metszéspontjuk Q az APB háromszög magasságpontja. 1 pont

PQ a háromszög harmadik magasságvonala, azaz a PQ egyenes merőleges AB-re. 1 pont

Összesen: 6 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző *indoklás nélkül* (csak az ábra alapján) állapítja meg a merőlegességet, *2 pontot* kaphat.

2. Legyen S a $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz olyan legalább kételemű részhalmaza, amelyre teljesül, hogy bármely két különböző elemének összegét képezve, csupa különböző számokat kapunk. Mennyi lehet az S elemei számának maximuma? (8 pont)

Megoldás. Az $S = \{1; 2; 3; 5; 8\}$ ötelemű halmaz elemeiből képzett kéttagú összegek páronként különböző értékűek ($1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $1 + 5 = 6$, $1 + 8 = 9$, $2 + 3 = 5$, $2 + 5 = 7$, $2 + 8 = 10$, $3 + 5 = 8$, $3 + 8 = 11$, $5 + 8 = 13$). 3 pont

Tegyük fel, hogy létezik a feltételeknek megfelelő tulajdonságú hatelemű S halmaz is. Ekkor S elemeiből $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$-féle kéttagú összeg képezhető. 1 pont

A H elemeiből képezhető kéttagú összegek értéke 3-tól 17-ig terjed, azaz 15-féle lehet. 1 pont

Így ha a 6-elemű S halmaznál azt szeretnénk elérni, hogy minden páronkénti összeg értéke különböző legyen, akkor az eredmények között minden 3-tól 17-ig terjedő számnak elő kell fordulnia. 1 pont

Viszont a 3 és a 17 csak egyféleképpen adódhat összegként, mégpedig az $1 + 2 = 3$ és $8 + 9 = 17$ formában. Ez azt jelenti, hogy ekkor az 1, 2, 8, 9 számoknak mindenképpen elő kell fordulniuk az S halmaz elemei között. 1 pont

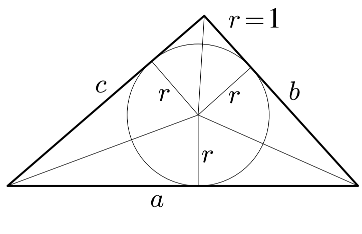
Ez viszont az $1 + 9 = 2 + 8$ egyenlőség alapján nem lehetséges.

A kapott ellentmondásból következik, hogy az S halmaz maximális elemszáma 5. 1 pont

Összesen: 8 pont

3. Igazoljuk, hogy egy egység sugarú kört tartalmazó háromszögnek egyik magassága legalább 3 egység hosszúságú. (8 pont)

1. megoldás. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit! A bizonyítást elég elvégezni arra az esetre, amikor a kör érinti a háromszög oldalait, mivel az egyéb esetekben létezik olyan, az eredetihez hasonló háromszög, amelynek oldalai párhuzamosak az eredeti háromszög oldalaival, érintik a megadott kört, és magasságai legfeljebb akkorák, mint az eredeti háromszögé. 1 pont



A háromszög területe az egyes háromszögek területének összege, azaz

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}.$$ 1 pont

Másrészt:

$$T = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2},$$ 1 pont

ahonnan

$$a = \frac{2T}{m_a}, \quad b = \frac{2T}{m_b}, \quad c = \frac{2T}{m_c}. \qquad \text{2 pont}$$

Ezeket behelyettesítve a fenti kifejezésbe, és elvégezve az egyszerűsítéseket kapjuk, hogy

$$1 = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}. \qquad \text{1 pont}$$

Jelölje a háromszög leghosszabb magasságát m, ekkor

$$1 = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geqq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m}.$$

Ebből adódik a feladat állítása. 2 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. Annak tárgyalása, hogy ha a beírt kört a háromszög oldalai nem érintik (ld. korábban). 1 pont

Tegyük fel, hogy a háromszög (egyik) legrövidebb oldala a (ebben az esetben hozzá tartozik a leghosszabb magasság). Ekkor 1 pont

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{am_a}{2}. \qquad \text{2 pont}$$

Becsüljük meg alulról a területet, és használjuk fel, hogy a kör egységsugarú.

$$\frac{am_a}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \geqq \frac{3ar}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Ebből $m_a \geqq 3$ adódik, tehát a feladat állítása teljesül. 4 pont

---

Összesen: 8 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az x és y valós számok összege 2, akkor

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) \geqq 4. \qquad \text{(8 pont)}$$

1. megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldalán elvégezve a beszorzást:

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

A középső két tag helyett egy összeg négyzetét kialakítva:

$$x^2y^2 + (x+y)^2 - 2xy + 1 \geqq 4. \qquad \text{2 pont}$$

Majd teljes négyzetté alakítva:

$$(xy-1)^2+(x+y)^2 \geqq 4. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel $(x+y)^2=4$ és $(xy-1)^2 \geqq 0$, ezért a feladatban szereplő egyenlőtlenség teljesül. 2 pont

Az egyenlőség feltétele: $x+y=2$, $xy=1$, azaz $x=y=1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. A megadott feltételt felhasználva: $y=2-x$. 1 pont

A helyettesítést elvégezve:

$$\left(x^2+1\right)\left[(2-x)^2+1\right] \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

A műveleteket végrehajtva:

$$\left(x^2+1\right)\left(5-4x+x^2\right) \geqq 4, \qquad \text{1 pont}$$

$$x^4-4x^3+6x^2-4x+1 \geqq 0. \qquad \text{1 pont}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség baloldalán egy teljes negyedik hatvány áll, ezért

$$(x-1)^4 \geqq 0.$$

Mivel egy negyedik hatvány értéke biztosan nemnegatív szám, ezért az egyenlőtlenség teljesül. 3 pont

Az egyenlőség feltétele: $x=y=1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

3. megoldás. Alkalmazzuk az $x=1+a$ és $y=1-a$ helyettesítéseket. Ekkor 1 pont

$$\left[(1+a)^2+1\right]\left[(1-a)^2+1\right] \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

A négyzetre emeléseket és az összevonásokat elvégezve:

$$\left(a^2+2+2a\right)\left(a^2+2-2a\right) \geqq 4. \qquad \text{2 pont}$$

A baloldalon az ismert nevezetes azonosság segítségével elvégezve a beszorzást:

$$\left(a^2+2\right)^2-(2a)^2 \geqq 4. \qquad \text{1 pont}$$

Ebből a rendezés után $a^4 \geqq 0$ adódik. 1 pont

Mivel egy negyedik hatvány értéke csak nemnegatív szám lehet, ezért az egyenlőtlenség tetszőleges a valós számra, és x, y-ra teljesül. 1 pont

Az egyenlőség feltétele: $a=0$, azaz $x=y=1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

5. Egy szórakozott professzornak 2000 – 2000 db 20 és 50 Ft-osa van. Tartozik valakinek, de elfelejtette, hogy pontosan mennyivel. Csak arra emlékszik, hogy az összeg 50-re végződik, és a nála lévő pénzérmékkel húszféleképpen tudja kifizetni.

Mekkora a professzor adóssága? (10 pont)

Megoldás. A kifizetendő összegben az 50 Ft-osok száma biztosan páratlan, mert ha páros számú 50-essel törlesztenénk, akkor azok összege 00-ra végződne, és a fennmaradó részt 20 Ft-osokkal nem lehetne kifizetni, mivel az 50-re végződő számok nem oszthatók 20-szal.

Ugyanígy belátható, hogy a felhasznált 20 Ft-osok száma 5-tel osztható. 2 pont

A vizsgálatot több részre lehet osztani aszerint, hogy a rendelkezésre álló érmék száma (2000 – 2000 db.) korlátozza-e a lehetőségek számát vagy sem.

1. eset: A tartozás összege legfeljebb $2000 \cdot 20 + 50$ Ft $= 40\,050$ Ft.

Ekkor, ha a tartozás összege $k \cdot 100 + 50$ Ft $(k \in \mathbb{N}^+)$, akkor a felhasznált 50 Ft-osok száma bármely 1-től $2k + 1$-ig terjedő páratlan szám lehet (hiszen van elég érménk). 1 pont

Ez $k + 1$ lehetőség, vagyis $k = 19$ esetén van 20 lehetőségünk kifizetni a tartozást csak 20 és 50 Ft-osokkal. 1 pont

Tehát a tartozás összege lehet 1950 Ft. 1 pont

2. eset: A tartozás összege legalább 40 150, de legfeljebb 99 950 Ft.

Ekkor 1 db 50 Ft-ost felhasználva már nem lehet a fennmaradó összeget csak 20 Ft-osokkal kifizetni, de több 50 Ft-ost felhasználva, igen. Ebben az esetben a lehetőségek száma a felhasznált 20 Ft-osok lehetséges számával, azaz a 0-tól 2000-ig terjedő 5-tel osztható számok darabszámával egyenlő, ami a 401. Tehát a kifizetésre ekkor 19-nél több lehetőség adódik. 1 pont

3. eset: A tartozás összege legalább 100 050 Ft. Ez csak 50 Ft-osokkal nem fizethető ki.

Ekkor vizsgáljuk meg, hogy hányféle érmekombináció maradhat a professzornál. Ez egyértelműen meghatározza, hogy hányféle kombinációban történhet a törlesztés. Mivel ebben az esetben a professzornál kevesebb, mint 40 050 Ft marad, ezért az 1. részben leírtak értelmében ez az összeg csak 1950 Ft lehet ahhoz, hogy 20-féleképpen állhasson elő 20 és 50 Ft-osok összegeként. 3 pont

Tehát a tartozás összege $140\,000 - 1950 = 138\,050$ Ft is lehet. 1 pont

Összesen: 10 pont