Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Adjuk meg az összes a, b, c pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy $[a, b, c] = a + b + c$. ($[a, b, c]$ az a, b, c számok legkisebb közös többszörösét jelöli.) **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja M, a magasságok a szokásos jelöléssel m_a, m_b, m_c. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 2!$$ **7 pont**

3. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy végtelen sok négyzetszám van, amely előáll n darab páronként különböző kettőhatvány összegeként (kettőhatványon kettőnek természetes szám kitevőjű hatványát értve)! **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Adjuk meg az összes a, b, c pozitív egész számot, amelyekre teljesül, hogy $[a, b, c] = a + b + c$. ($[a, b, c]$ az a, b, c számok legkisebb közös többszörösét jelöli.) **7 pont**

Megoldás: Feltehető, hogy $a \leq b \leq c$. Ekkor $a+b+c \leq 3c$, ezért mivel c többszöröse, $[a, b, c]$, értéke $2c$ vagy $3c$ lehet (c nem lehet, mert $a + b + c > c$). 1 pont

1. eset: $[a, b, c] = 2c$. Ekkor $a \mid 2c$, $b \mid 2c$, $a + b = c$. Az utóbbit $2c$-vel osztva $\frac{a}{2c} + \frac{b}{2c} = \frac{1}{2}$, azaz elő kell állítani az $\frac{1}{2}$-et két törzstört (1 számlálójú tört) összegeként. Egyik törzstört nevezője se lehet 2, mert akkor az összegük több, mint $\frac{1}{2}$. Ha mindkét törzstört nevezője legalább 4, akkor összegük legfeljebb $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, egyenlőség csak akkor áll fenn, ha mindkettő $\frac{1}{4}$. Ha viszont $\frac{a}{2c} = \frac{b}{2c} = \frac{1}{4}$, akkor $a = b = \frac{c}{2}$, viszont ekkor $[a, b, c] = c$, azaz így nem kapunk megoldást. Ha pedig mondjuk (a és b szimmetriája miatt) $\frac{a}{2c} = \frac{1}{3}$ akkor $\frac{b}{2c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, tehát a második lehetőség ebben az esetben az, hogy $a = \frac{2c}{3}$ és $b = \frac{c}{3}$. Mivel $2c$ osztható 3-mal is, ezért c osztható 6-tal. Legyen $c = 6k$, így $a = 4k$ és $b = 2k$. Ez könnyen láthatóan jó megoldás, ha k pozitív egész. 3 pont

2. eset: $[a, b, c] = 3c$. Ekkor tehát $a \mid 3c$, $b \mid 3c$, $a + b = 2c$. Az előző esethez hasonlóan kapjuk, hogy $\frac{a}{3c} + \frac{b}{3c} = \frac{2}{3}$, tehát most a $\frac{2}{3}$-ot kell törzstörtek összegeként előállítani. A törzstörtek nevezője legalább 3, mert $a \leq c$ és $b \leq c$. Ekkor viszont az összegük legfeljebb $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, tehát csak az lehet, hogy mindkettő $\frac{1}{3}$. Ekkor $\frac{a}{3c} = \frac{b}{3c} = \frac{1}{3}$, vagyis $a = b = c$, de ez nem jó megoldás, mert ekkor a legkisebb közös többszörösük c, nem pedig $3c$. 2 pont

Összefoglalva, az összes megoldást úgy kapjuk, hogy választunk egy k pozitív egész számot, és vesszük a $2k$, $4k$, $6k$ számokat valamilyen sorrendben. 1 pont

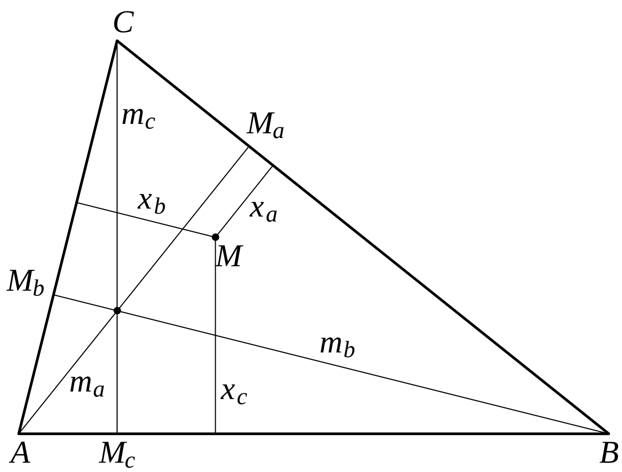
Összesen: **7 pont**

2. Az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontja M, a magasságok a szokásos jelöléssel m_a, m_b, m_c. Bizonyítsd be, hogy

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 2!$$

7 pont

Megoldás:



Bocsássunk merőlegeseket M-ből az a, b, c oldalakra, és a keletkező merőleges szakaszokat jelölje rendre x_a, x_b, x_c.

Mivel ABC hegyesszögű, az A, B, C csúcsokból a szemközti oldalakhoz húzható merőleges legfeljebb olyan hosszú, mint bármely, a csúcsot az oldal valamely pontjával összekötő töröttvonal hossza. 1 pont

Így

$MA+x_a \geq m_a$, $MB+x_b \geq m_b$, $MC+x_c \geq m_c$.

Ezért

$$MA \geq m_a - x_a, \qquad MB \geq m_b - x_b, \qquad MC \geq m_c - x_c,$$ 1 pont

ahonnan

$$\frac{MA}{m_a} \geq 1 - \frac{x_a}{m_a}, \qquad \frac{MB}{m_b} \geq 1 - \frac{x_b}{m_b}, \qquad \frac{MC}{m_c} \geq 1 - \frac{x_c}{m_c}.$$ 1 pont

Összeadva ezeket:

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 3 - \left(\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c}\right)$$ 1 pont

Itt

$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c} = \frac{ax_a}{am_a} + \frac{bx_b}{bm_b} + \frac{cx_c}{cm_c} = \frac{ax_a}{2T_{ABC}} + \frac{bx_b}{2T_{ABC}} + \frac{cx_c}{2T_{ABC}} = \frac{ax_a + bx_b + cx_c}{2T_{ABC}}$$ 1 pont

Másrészt viszont $ax_a + bx_b + cx_c = 2T_{BCM} + 2T_{ACM} + 2T_{ABM} = 2T_{ABC}$. 1 pont

Eszerint

$$\frac{MA}{m_a} + \frac{MB}{m_b} + \frac{MC}{m_c} \geq 3 - \left(\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c}\right) = 3 - \frac{2T_{ABC}}{2T_{ABC}} = 2.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy végtelen sok négyzetszám van, amely előáll n darab páronként különböző kettőhatvány összegeként (kettőhatványon kettőnek természetes szám kitevőjű hatványát értve)! **7 pont**

Megoldás: Tekintsük a következő összeget: $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$. 2 pont

Határozzuk meg ennek négyzetét! $\left(2^{n+1} - 1\right)^2 = 2^{2n+2} - 2^{n+2} + 1 = 2^{n+2}(2^n - 1) + 1$. 1 pont

Mivel $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, mindkét oldalt 2^{n+2}-nel szorozva kiderül, hogy $2^{n+2}(2^n - 1)$ n darab különböző kettőhatvány összege. 1 pont

Ehhez 1-et hozzáadva kapjuk, hogy $\left(2^{n+1} - 1\right)^2$ $(n + 1)$ darab kettőhatvány összege. 1 pont

Egy ilyen négyzetszámot 2 páros kitevőjű hatványával szorozva újra négyzetszámot kapunk, amely előáll $n + 1$ kettőhatvány összegeként, azaz végtelen sok négyzetszám van, amely előáll adott, de legalább két darab kettőhatvány összegeként. 1 pont

Kettőnek páros kitevőjű hatványait nézve kiderül, hogy végtelen sok kettőhatvány van, amely négyzetszám. 1 pont

Összesen: **7 pont**