Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
1. forduló
Haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Anna matematika házi feladatára ráfolyt a tinta. A lapon egy másodfokú egyenlet volt

$$x^2 + bx + c = 0$$

alakban, de sajnos most csak a következő látszódik:

$$x^2 + \ldots x + \ldots = 0$$

az elsőfokú és a konstans b, c együtthatók „összetintázódtak”. Az egyenletről a következőket tudjuk:

- a két hiányzó b, c együttható egy-egy olyan egész szám, amelyek összege 2018,
- az egyenlet megoldásai egész számok.

Milyen számok lehettek a tintás b, c együtthatók? **7 pont**

Megoldás: Legyen az egyenlet két egész megoldása: x_1, x_2. A Viète-formulák alapján

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b \qquad \text{és} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = c. \qquad \text{1 pont}$$

Vonjuk ki a második formulából az elsőt:

$$x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = c + b = 2018 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 + 1 = 2019.$$

Innen szorzattá alakítva:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2019 = 3 \cdot 673 \qquad (673 \text{ prím!}) \qquad \text{2 pont}$$

Innen a lehetséges $x_1 - 1$, $x_2 - 1$ egész számpárok ($x_1 - 1$ értékét választva a nagyobbnak):

$$(x_1 - 1; x_2 - 1) \longrightarrow (2019; 1); \quad (673; 3); \quad (-2019; -1); \quad (-673; -3), \qquad \text{1 pont}$$

így innen: $(x_1; x_2) \longrightarrow (2020; 2); (674; 4); (-2018; 0); (-672; -2)$, 1 pont

és végül újra csak a Viète-formulák alapján:

$$(b; c) = (-(x_1 + x_2); x_1 \cdot x_2) \longrightarrow (-2022; 4040); \quad (-678; 2696); \quad (2018; 0); \quad (674; 1344) \qquad \text{2 pont}$$

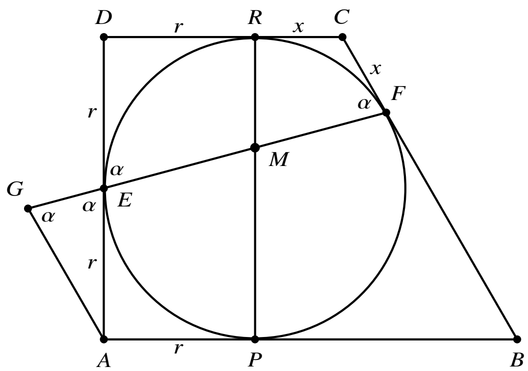
Vagyis ez a négy számpár lehetett a tintás számok helyén.

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Fogadjuk el jó megoldásnak azt is, ha a versenyző kizárja a $(2018; 0)$ esetet arra hivatkozva, hogy 0 elé nem írunk előjelet.

2. Az $ABCD$ derékszögű érintőtrapéz alapjai AB és CD ($AB > CD$), az alapokra merőleges szár AD. A trapézba írt kör az AB alapot P-ben, a CD alapot R-ben érinti. A szárakon lévő érintési pontokat összekötő szakasz a PR szakaszt M-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy A, M és C egy egyenesbe esik! **7 pont**

Megoldás: A beírt kör az AD szárat az E, a CB szárat az F pontban érinti, a kör sugara legyen r. Ekkor $DR = DE = AE = AP = r$, legyen $CR = CF = x$. 1 pont



A trapéz szárai a beírt kör EF húrjának két végpontjához húzott érintők, így e húrral egyenlő szögeket zárnak be. Legyen $DEF\sphericalangle = CFE\sphericalangle = \alpha$. 1 pont

Az A csúcson átmenő, BC szárral párhuzamos egyenes és az EF egyenes metszéspontja legyen G.

Az AEG háromszög E-nél lévő szöge a $DEF\sphericalangle$ csúcsszöge, ezért α-val egyenlő. 1 pont

Az AEG háromszög G-nél lévő szöge és a $CFE\sphericalangle$ váltószögek, így az $AGE\sphericalangle$ is éppen α. Ezért az AGE háromszög egyenlő szárú, tehát $AG = AE = r$. 1 pont

Nyilván a PGA háromszög is egyenlő szárú, $AG = AP = r$. Az RFC háromszög C-nél lévő szöge és a PGA háromszög A-nál lévő szöge váltószögek, így e két egyenlő szárú háromszög hasonló. 1 pont

Sőt, mivel a megfelelő oldalaik párhuzamosak, ezért középpontosan hasonlók. E hasonlóságnál R és P, illetve a G és F megfelelő pontok, így az RP és a GF egyenesek M metszéspontja megadja a hasonlóság centrumát. 1 pont

Mivel A és C szintén megfelelő pontok, az őket összekötő AC egyenes is átmegy M-en, ezt kellett belátni. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletet! (p; q pozitív prímek, míg a természetes szám)

$$p^2 + p^2q^2 + q^2 = a^2$$ **7 pont**

Megoldás: Vizsgálódjunk (mod 4) szerint!

Ha p, q páratlan számok, akkor $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod 4$ miatt $a^2 \equiv 3 \pmod 4$ lenne, ami lehetetlen. Vagyis valamelyik prím páros. 2 pont

Legyen $q = 2$. Ekkor $p^2 + p^2q^2 + q^2 = a^2 \longrightarrow 5p^2 + 4 = a^2 \longrightarrow 5p^2 = (a-2)(a+2)$. 2 pont

Mivel p pozitív prím, a nemnegatív egész ($a - 2 < a + 2$ miatt), a következő lehetőségek vannak:

$a - 2 = 1$, $a + 2 = 5p^2 (= 1 + 4 = 5) \Rightarrow p = 1$ nem megoldás.

$a - 2 = 5$, $a + 2 = p^2 (= 9) \Rightarrow p = 3$ megoldás.

$a - 2 = p$, $a + 2 = 5p \Rightarrow 4 = (a + 2) - (a - 2) = 5p - p = 4p \Rightarrow p = 1$ nem megoldás.

$a - 2 = p^2$, $a + 2 = 5 \Rightarrow a - 2 = 5 - 4 = 1 = p^2 \Rightarrow p = 1$ nem megoldás. 2 pont

Vagyis az egyenlet megoldásai: $p = 2$; $q = 3$ és $p = 3$; $q = 2$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Rajzoljunk a koordináta-rendszer origója mint középpont köré 1, illetve 4 egység sugarú köröket. Tekintsük a két kör közötti zárt körgyűrű tartomány pontjait. Mely pontokra lesz a következő kifejezés értéke a legkisebb, illetve a legnagyobb?

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + xy$$ **7 pont**

Megoldás: A koordináta-rendszer $P(x; y)$ pontjaira a feltétel szerint teljesül, hogy

$$1 \le x^2 + y^2 \le 16.$$ 1 pont

Ezenkívül a geometriai és kvadratikus közepek összehasonlításából tudjuk, hogy

$$|xy| \le \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Ha az első vagy harmadik negyedben vagyunk, akkor $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$, ha pedig a második vagy negyedik negyedben, akkor $xy \geqslant -\frac{x^2+y^2}{2}$. 1 pont

Az egyenlőség $x = y$, illetve $x = -y$ esetén áll fenn. 1 pont

Így a maximális értéket kapjuk, ha

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + xy \le x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) = 24,$$ 1 pont

és a minimális értéket, ha

$$f(x; y) = x^2 + y^2 + xy \geqslant x^2 + y^2 - \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{2},$$ 1 pont

ami $x = y$, illetve $x = -y$ esetén áll fenn.

A legnagyobb értéket a legnagyobb sugarú kör és az $x = y$ egyenes metszeteként kapjuk: $M_1\left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, illetve $M_2\left(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$.

A legkisebb értéket pedig a legkisebb sugarú kör és az $x = -y$ egyenes metszeteként határozhatjuk meg: $M_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, illetve $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Egy 2018×2018 egységnégyzetből álló négyzet alakú táblázat néhány (egységnégyzetnyi) mezőjének középpontját pirosra színezzük. Legfeljebb hány középpont színezhető ki, ha azt szeretnénk, hogy ne legyen olyan derékszögű háromszög a táblázatunkban, amelynek csúcsait a középpontok közül választjuk és minden csúcsa piros. **7 pont**

Megoldás: Az első sor és az első oszlop összes mezőjének (kivéve a metszet bal-felső mezőnek) a középpontját pirosra színezve nyilván nincs az ábrában tiltott piros derékszögű háromszög.

Vagyis $2 \cdot 2018 - 2 = 4034$ mező kiválasztható. (Általában $n \times n$ méret esetén $2n-2$ a maximum.)

Egy helyes konstrukcióra: 2 pont

Megmutatjuk, hogy általában $2n - 1$ (vagyis most 4035) színezett pont esetén már van piros derékszögű háromszög.

Csak olyan derékszögű háromszögeket fogunk vizsgálni, amelyek befogói vízszintesek és függőlegesek (még ilyenből is lesz piros)! Ezeket hívjuk *standard* háromszögeknek! 1 pont

Ennek igazolásához teljes indukciót használunk.

I) A bázis-állítás: 2×2-es méretű táblázatban kiválasztva (a 4 lehetséges pont közül) 3 pontot nyilván van a táblázatban piros derékszögű háromszög.

II) Indukciós feltevés: Tegyük fel, hogy $k \times k$ méretű táblázat és $2k - 1$ kiválasztott pont estén mindig van piros standard derékszögű háromszög.

III): Ezek után legyen $(k + 1) \times (k + 1)$ méretű a táblázat és $2k + 1$ kiválasztott piros pont!

Ha két sort megcserélünk vagy két oszlopot megcserélünk, az a piros standard háromszögek számát nem változtatja. 2 pont

Mivel a kiválasztott pontok száma kevesebb, mint $2(k + 1)$ (azaz a sorok/oszlopok számának duplája), ezért van olyan sor, és van olyan oszlop is, amelyben legfeljebb 1 pontot színeztünk be. 1 pont

Sor és oszlopcserékkel vigyünk a legfelső sorba és a bal szélső oszlopba egy-egy ilyen „kevés pontos” (összesen legfeljebb $1+1 = 2$ beszínezett pontos) sort/oszlopot. Ekkor a táblázat maradék $k \times k$-as részében túl sok, legalább $2k - 1$ színezett pont van, ami az indukciós feltevés miatt azt jelenti, hogy van tiltott (standard) háromszög.

Ezzel az állítás bizonyítottuk, $n \times n$ méretű táblázatban $2n - 1$ (vagyis most 4035) piros pont esetén már van piros derékszögű háromszög.

Válasz: vagyis legfeljebb 4034 piros pontot lehet kiválasztani. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Indukció nélkül is bebizonyítható, hogy ha nincsen csupa piros csúcspontú derékszögű háromszög (így standard sincs) az $n \times n$-es táblán, akkor legfeljebb $2n - 2$ középpont lehet pirosra színezve.

Ha csak n piros középpont van, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.

Ha n-nél több piros középpont van, akkor van olyan sor is és oszlop is, amelyben két piros pont is van, például az i-edik sor és a j-edik oszlop.

Nem megy az általánosság rovására, ha a i-edik sort az első (fölső) sornak és a j-edik oszlopot az utolsó (jobb szélső) oszlopnak vesszük.

Megállapíthatjuk, hogy:

1. Az első sor utolsó oszlopában lévő középpont nem lehet piros, ellenkező esetben lenne piros (standard) háromszög.

2. Az első sorban lévő piros négyzet-középpontok oszlopában sem lehet több piros négyzet-középpont, ellenkező esetben lenne piros (standard) háromszög.

3. Ugyanígy, az utolsó oszlopban lévő piros négyzet-középpontok sorában sem lehet további piros négyzet-középpont.

Ezek után minden olyan sort, amelyben legalább két piros középpont van, „vetítsünk" az első sorra, illetve minden olyan oszlopot, amelyben legalább két piros középpont van, „vetítsünk" az utolsó oszlopra.

A 2. megállapítás alapján világos, hogy az első sor minden négyzet-középpontjába legfeljebb egy piros pont eshet. illetve a 3. megállapítás alapján az utolsó oszlopban hasonlóan, minden négyzet-középpontba legfeljebb egy piros pont eshetett.

A további piros négyzet-középpontok egyedüli pontok a sorukban/olszopukban, így akár az első sorra, akár az utolsó oszlopra vetítjük, ott olyan négyzet-középpontba esnek, amely még nem piros.

Ebből következik, hogy a piros négyzet-középpontok száma legfeljebb annyi, mint az első sorban és az utolsó oszlopban (de nem mindkettőben) található négyzet-középpontok száma, $2(n-1)$.

Tehát legfeljebb $2n-2$ négyzet-középpont lehetett piros.

A piros négyzet-középpontok száma akkor nem éri el a $(2n-2)$-t, azaz az első sor és utolsó oszlop – közös elem nélküli – teljes kitöltését, ha van olyan oszlop/sor, amelyet mindkettőre vetíthettünk volna, azaz van olyan sor/olszop, amelyben csak egy középpont piros; továbbá ha több sort is vetítünk az első sorra (ekkor az utolsó oszlopban a soroknak megfelelő helyre nem vetítünk pontot), vagy fordítva, ha több oszlopot is vetítünk az utolsó oszlopra. Vagyis a $2n-2$ piros középpont *csak* a megoldásban látott konstrukcióhoz hasonló elrendezéssel érhető el.