Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyen adott az $1 < n \in \mathbb{N}^+$, és definiáljuk $k \in \{2; \ldots; n\}$ esetén az $a_k, b_k \in \mathbb{N}^+$ számokat a következőképpen:

a_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $k^{a_k} \leq n$, míg

b_k legyen az a legnagyobb pozitív egész, hogy $b_k^k \leq n$.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor n-re teljesül:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n$$

2. Adott $n \geq 3$ darab pont a síkon. Nincs közöttük három, amely egy egyenesre illeszkedne. Válasszunk ki az összes lehetséges módon három pontot az adott pontok közül. Az így kapott háromszögek közül a legnagyobb területű területét jelöljük T-vel, a legkisebb területű területét t-vel. Tudjuk, hogy $\frac{T}{t} \leq 2$! Mely n értékekre valósulhat ez meg?

3. Melyek azok a $b > 1$ pozitív egész számok, amelyekre bármely k pozitív egész szám esetén van olyan n pozitív egész, hogy az n^2 négyzetszám b-alapú számrendszerben felírt jegyeinek az összege éppen k?