Az 1999–2000. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny feladatai

KEZDŐK

Első forduló
Mindhárom kategória

1. Mi lehet az a természetes szám, amely négyzetszám lesz, ha hozzáadunk 5-öt, de négyzetszám lesz akkor is, ha elveszünk belőle 11-et?

2. Egy $ABCD$ trapézban az alapok összege 10, a szárak összege pedig 6 hosszúságegység. Tudjuk, hogy van két olyan kör, amelyek érintik egymást, az alapokat és egy-egy szárat is. Számítsa ki a körök sugarát!

3. Bizonyítsa be, hogy három egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet egy egész szám harmadik hatványa!

4. Határozza meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely (a tízes számrendszerben) csak 0 és 1-es számjegyekből áll, és osztható 792-vel!

5. Adott az ABC szabályos háromszög. Melyek azok az egyenesek, amelyek ezt a háromszöget két olyan síkidomra bontják, amelyeknek kerülete és területe is egyenlő?

Második (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Az ABC hegyesszögű háromszög AE magassága a B csúcsnál lévő β szög szögfelezőjét a P pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy ha a β szög a másik két szög számtani közepe, akkor: $2 \cdot AE = 3 \cdot BP$.

2. Oldja meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:

$$ab + ac + bc = 2 + abc.$$

3. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám. Az átfogó hossza nem osztható 5-tel. Bizonyítsa be, hogy a háromszög területének mérőszáma 10 többszöröse.

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Azonos az I. kategória 3. feladatával.

2. Igazolja, hogy ha egy hegyesszögű háromszögben a, b és c jelöli az oldalakat, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot, akkor

$$1 < \frac{a + 2m_a}{b + c} < \sqrt{2}.$$

3. Határozza meg a következő összeg pontos értékét:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{1999^2} + \frac{1}{2000^2}}.$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Adott két közös kezdőpontú, egymásra merőleges szakasz. Mindkettő hossza 2000 egység. Mindkét szakaszon adott 2001-2001 belső pont. Bizonyítsa be, hogy ebből a 4002 pontból kiválasztható három, nem egy egyenesbe eső pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe legfeljebb 250 területegység!

2. Az n pozitív egész számról azt tudjuk, hogy 5-tel nem osztható, 128-cal osztva 96 maradékot ad, a tízes számrendszerben k jegyű, továbbá az n minden jegye páros, jegyeinek összege $2k-4$, jegyeinek négyzetösszege $4k$. Mi lehet az n?

3. Egy hegyesszögű háromszögben a, b és c jelöli az oldalakat, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot. Határozza meg a K és L pozitív valós számokat úgy, hogy bármely hegyesszögű háromszögre igaz legyen

$$K < \frac{a+2m_a}{b+c} < L,$$

de ha $K_1 > K$ vagy $L_1 < L$, akkor

$$K_1 < \frac{a+2m_a}{b+c} < L_1$$

már ne teljesüljön minden hegyesszögű háromszögre!

HALADÓK
Első forduló

I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sqrt[4]{16+x} + \sqrt[4]{16-x} = 4$$

2. Melyek azok a p, q pozitív prímszámok, amelyekre $7p+q$ és $pq+11$ is prím?

3. A c átfogójú derékszögű háromszög súlyvonalainak négyzetösszege d. Igazoljuk, hogy ha c és d egész szám, akkor $d \geq 6$.

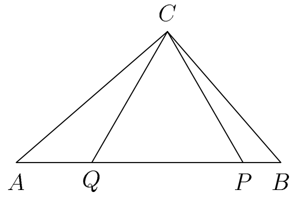
4. Hét ember néhány napos kirándulásra készül. Mindennap egy kör alakú asztal köré ülve ebédelnek. Elhatározzák, hogy úgy ülnek le az ebédekhez, hogy ugyanaz a két ember ne kerüljön kétszer egymás mellé. Maximum hány naposra tervezhetik a kirándulást?

5. Adott egy négyzet és kilenc egyenes úgy, hogy az egyenesek mindegyike metszi a négyzet két szemben lévő oldalát, és levágja területének negyedét. Bizonyítsuk be, hogy lesz három olyan egyenes, amelyik egy pontra illeszkedik.

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. Azonos az I. kategóriában kitűzött 2. feladattal.

2. Az ABC derékszögű háromszögben úgy helyezkedik el a QPC szabályos háromszög, hogy a PQ oldal illeszkedik az AB átfogóra az ábrán látható módon, továbbá teljesül, hogy a BCP háromszög területe fele az AQC háromszög területének. Határozzuk meg a $PQ : BA$ arányt!



3. Az (a_n) számsorozat képzési szabálya $a_{n+1} = 2a_n - 1$, ahol a_1 egy tetszőlegesen választott pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat 1999-edik és harmadik tagjának különbsége osztható 30-cal!

4. Azonos az I. kategóriában kitűzött 5. feladattal.

5. Tekintsük azokat az x egész számokat és p pozitív prímszámokat, amelyekre a $\sqrt{x+p} - \sqrt{x}$ különbség értéke egész szám! Igazoljuk, hogy bármely adott páratlan prímszám esetén pontosan egy megfelelő x értékre lesz egész értékű a különbség.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Bizonyítsuk be, hogy ha p, q és r olyan valós számok, amelyekre $p = q + r + 1$, akkor az

$$(x^2 + px + q)(x^2 + px + r) = 0$$

egyenletnek legalább két különböző valós megoldása van.

2. Egy 2 egység átfogójú derékszögű háromszög belső szögfelezői a háromszög köréírt körét a P, Q, R pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy a PQR háromszög területe legfeljebb $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ területegységnyi.

3. A 2-nek melyik legnagyobb pozitív egész kitevőjű hatványával osztható $1999^{2000} - 1$?

4. Az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvényre teljesül, hogy ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $|f(x)| \leq 1$.
Bizonyítsuk be, hogy $|a| + |b| + |c| \leq 17$.

5. Egy iskolába 1999 diák jár. Minden nebulónak a többi 1998 közül pontosan k szimpatikus. Mely k esetén lehetünk biztosak benne, hogy a diákok között van kettő, akik kölcsönösen szimpatikusak egymásnak, vagy kölcsönösen nem szimpatizálnak?

Második forduló

I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. Határozzuk meg az

$$\left| |x+1| + |x-2| - x^2 \right| = 2$$

egyenletet kielégítő valós x értékeket!

2. Határozzuk meg azt a legkisebb törtet, amelynek számlálója és nevezője is pozitív egész szám, a tört és a tört négyzetének összege nagyobb, mint 6, továbbá számlálójának és nevezőjének összege kisebb, mint 100.

3. Legyen az ABC háromszög A csúcsból induló szögfelezője AK, B csúcsból induló szögfelezője BL (K a BC oldalra, L az AC oldalra illeszkedik). A szögfelezők metszéspontja legyen O.
Bizonyítsuk be, hogy ha $OK = OL$, akkor a háromszögnek vagy van $60°$-os szöge, vagy egyenlő szárú.

4. Bizonyítsuk be, hogy 2000 darab páratlan pozitív egész szám reciprokának összege nem lehet 1, de van olyan 2000 darab páronként különböző pozitív egész szám, amelyek reciprokának összege 1.

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. Megegyezik az I. kategória 1. feladatával.

2. Legyen P az ABC szabályos háromszög köré írható körének egy olyan pontja, amire az AP szakasz a BC oldalt egy belső Q pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} = \frac{1}{PQ}.$$

3. A 2-nek melyik legnagyobb pozitív egész kitevőjű hatványával osztható $1999^{2000} - 1$?

4. Egy 1999-szer 2000-es téglalap alakú táblázat minden mezőjében a (-1) vagy az 1 szám áll. Egy-egy alkalommal bármelyik sorban vagy oszlopban megváltoztathatjuk az összes szám előjelét.

Bizonyítsuk be, hogy az adott ,,művelet” véges sokszori alkalmazásával elérhető,

a) hogy a táblázatban lévő számok összege legalább 2000 legyen;

b) hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege nemnegatív legyen.

Harmadik (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. Hány valós megoldása van a

$$19[x] + 99\{x\} = 2000$$

egyenletnek? ($[x]$ az x egész részét, $\{x\}$ pedig x törtrészét jelenti).

2. Milyen maradékot ad 72-vel osztva a p prímszám, ha $p = n^2 + 2n + 3$ alakú, ahol n természetes szám?

3. Egy paralelogramma belső szögfelezői az N_1 négyszöget zárják közre. Az N_1 négyszög belső szögfelezői az N_2 négyszöget határolják. Mekkorák az eredeti paralelogramma szögei, ha az N_1 és N_2 négyszögek területe egyenlő?

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. Azonos az I. kategória 2. feladatával.

2. Egy raktárban az árukészletet legfeljebb 1 tonnás csomagokban tárolják. Van egy 1 és egy 2 tonnás teherautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy egy fuvarral legalább M tonna árut szállítunk el. Mekkora M legnagyobb értéke?

3. Az egységnyi átfogójú ABC derékszögű háromszög oldalaira $AC < BC < AB$ teljesül. Rajzoljuk meg az A ponton átmenő, a BC egyenest B-ben érintő kört, majd a B ponton átmenő, a CA egyenest C-ben érintő kört, végül pedig a C ponton átmenő és az AB egyenest az A-ban érintő kört.

a) Igazoljuk, hogy a három körnek van közös pontja!

b) A közös pontot P-vel jelölve, mutassuk meg, hogy

$$\frac{11}{16} < PA^2 + PB^2 + PC^2 < 1.$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Az $ABCD$ négyzet belsejében úgy vettük fel a P pontot, hogy $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Mekkora az $APB\angle$?

2. Határozzuk meg az

$$\left(1000+\sqrt{1000^2+1}\right)^{1000}$$

szám tizedesvesszőt követő kétezredik számjegyét.

3. Egy raktárban az árukészletet legfeljebb 1 tonnás csomagokban tárolják. Van egy 3 és egy 4 tonnás teherautónk. Szerződést akarunk kötni, amelyben vállaljuk, hogy egy fuvarral legalább M tonna árut szállítunk el. Mekkora M legnagyobb értéke?