Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

1999/2000 10. évfolyam 2. kategória 1. forduló

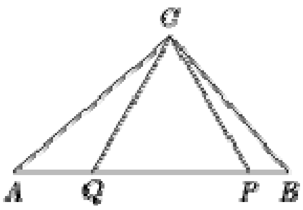
A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Melyek azok a p, q pozitív prímszámok, amelyekre $7p+q$ és $pq+11$ is prím?

2. feladat

Az ABC derékszögû háromszögben úgy helyezkedik el a QPC szabályos háromszög, hogy a PQ oldal illeszkedik az AB átfogóra az ábrán látható módon, továbbá teljesül, hogy a BCP háromszög területe fele az AQC háromszög területének. Határozzuk meg a $PQ:BA$ arányt!



3. feladat

Az (a_n) számsorozat képzési szabálya $a_{n+1}=2a_n-1$, ahol a_1 egy tetszõlegesen választott pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat 1999-edik és harmadik tagjának különbsége osztható 30-cal!

4. feladat

Adott egy négyzet és kilenc egyenes úgy, hogy az egyenesek mindegyike metszi a négyzet két szemben lévõ oldalát, és levágja területének negyedét. Bizonyítsuk be, hogy lesz három olyan egyenes, amelyik egy pontra illeszkedik.

5. feladat

Tekintsük azokat az x egész számokat és p pozitív prímszámokat, amelyekre a $\sqrt{x+p}-\sqrt{x}$ különbség értéke egész szám! Igazoljuk, hogy bármely adott páratlan prímszám esetén pontosan egy megfelelõ x értékre lesz egész értékû a különbség.