Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

1999/2000 10. évfolyam 3. kategória 1. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha p, q és r olyan valós számok, amelyekre $p=q+r+1$, akkor az

$$(x^2+px+q)(x^2+px+r)=0$$

egyenletnek legalább két különbözõ valós megoldása van.

2. feladat

Egy 2 egység átfogójú derékszögû háromszög belsõ szögfelezõi a háromszög köréírt körét a P, Q, R pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy a PQR háromszög területe legfeljebb $\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$ területegységnyi.

3. feladat

A 2-nek melyik legnagyobb pozitív egész kitevõjû hatványával osztható $1999^{2000}-1$?

4. feladat

Az $f(x)=ax^2+bx+c$ függvényre teljesül, hogy ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $|f(x)| \leq 1$.

Bizonyítsuk be, hogy $|a|+|b|+|c| \leq 17$.

5. feladat

Egy iskolába 1999 diák jár. Minden nebulónak a többi 1998 közül pontosan k szimpatikus. Mely k esetén lehetünk biztosak benne, hogy a diákok között van kettõ, akik kölcsönösen szimpatikusak egymásnak, vagy kölcsönösen nem szimpatizálnak?