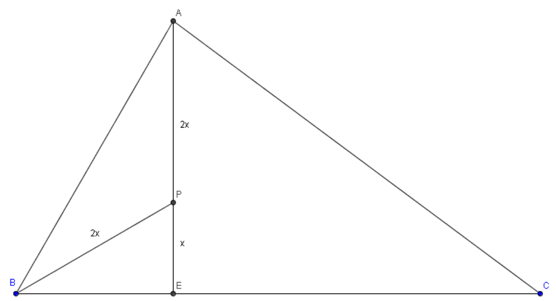
1. Az ABC hegyesszögű háromszög AE magassága a B csúcsnál lévő β szög szögfelezőjét a P pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy ha a β szög a másik két szög számtani közepe, akkor 2AE=3BP.

Mo: $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$-ből a $\beta = 60°$. BEP derékszögű háromszög szögei: $30°,60°,90°$, PE=x, BP=2x. Külső szögtétele miatt, $BAP\angle = 30°$, így BAP háromszög egyenlőszárú, AP=2x, tehát: AE=2x+x=3x.



2. Oldja meg a természetes számok halmazán a következő egyenletet:

$$ab + ac + bc = 2 + abc$$

Mo: Legyen $0 \le a \le b \le c$. Ekkor $abc < abc + 2 \le ac + ac + bc$. Ha c=0, akkor a=b=0 lenne, de ez nem elégíti ki az egyenletet. Ha c pozitív, akkor $ab < 2a + b$, azaz $(a-1)(b-2) < 2$. Itt 6 eset van: 1, a-1=0, b-2 egész, ebből a=b=c=1; 2, b-2=0, a-1 egész, ebből nem lesz megfelelő egészek; 3, a-1=b-2=1, ebből a=2, b=3, c=4; 4, a-1=1, b-2=-1, ebből nem lesz megoldás; 5, a-1=-1, b-2=1; ebből sem lesz megoldás; 6, a-1=-1, b-2=-1, ebből a=0, b=1, c=2.

3. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám. Az átfogó hossza nem osztható 5-tel. Bizonyítsa be, hogy a háromszög területének mérőszáma 10 többszöröse.

Mo: Ha egyik oldal sem osztható 5-tel, akkor a négyzeteik 5-ös maradéka 1, -1, így a befogók négyzetösszegének 5-ös maradéka 2, 0,-2 lenne, az átfogó négyzetének maradéka viszont 1, -1; tehát az egyik befogó osztható 5-tel.
Ha mindkét befogó páros, vagy valamelyik befogó 4-gyel osztható, akkor a terület 10-zel osztható. Ha mindkét befogó páratlan, akkor a négyzetösszegük 4-es maradéka 1+1=2, ami nem lehet négyzetszám. Ha egyik befogó páratlan, a másik 4k+2 alakú, akkor a befogók négyzetösszegének 8-as maradéka 1+4=5, ami szintén nem lehet négyzetszám.