

2012. április 13., péntek

Feladat 5. A p és q prímek az alábbi egyenlőséget teljesítik valamely n pozitív egészre:

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$

Adjuk meg $q - p$ összes lehetséges értékét.

Feladat 6. A *Fércebook* közösségi hálózaton végtelen sok ember van regisztrálva. Két (különböző) felhasználó köthet *barátságot*, de mindenkinek csak véges sok barátja van. Minden felhasználónak van legalább egy barátja. (*A barátság szimmetrikus, azaz ha B-nek barátja A, akkor A-nak is barátja B.*)

Minden felhasználónak ki kell jelölnie, hogy a barátai közül ki a *legjobb barátja*. Abból, hogy A B -t jelöli meg legjobb barátjaként, (sajnos) nem feltétlenül következik, hogy B éppen A -t jelöli meg legjobb barátjaként. Ha valakit legjobb barátjának választottak, akkor ő *1-legjobb barát*. Általánosabban, egy $n > 1$ pozitív egészre egy felhasználó *n-legjobb barát*, ha a legjobb barátja valakinek, aki $(n - 1)$ -*legjobb barát*. Ha valaki minden k pozitív egészre *k-legjobb barát*, akkor *népszerű*.

- (a) Bizonyítsuk be, hogy minden népszerű ember valamelyik másik népszerű embernek a legjobb barátja.
 (b) Mutassuk meg, hogy ha az embereknek végtelen sok barátjuk is lehet, akkor előfordulhat, hogy egy népszerű ember nem a legjobb barátja egyetlen népszerű embernek sem.

Feladat 7. Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melynek körülírt köre Γ , magasságpontja pedig H . Legyen K egy pont a Γ körön, A -ból nézve BC túloldalán. Legyen L a K -nak AB egyenesre vonatkozó tükörképe, M pedig K -nak BC egyenesre vonatkozó tükörképe. Jelöljük E -vel Γ -nak és a BLM háromszög körülírt körének eddig meg nem jelölt metszéspontját. Mutassuk meg, hogy a KH , EM és BC egyenesek egy ponton mennek át. (*A háromszög magasságpontja az a pont, amely mindhárom magasságán rajta van.*)

Feladat 8. Egy szó valamilyen ábécéből származó betűk véges sorozata. Egy szó *ismétlő*, ha megkapható kettő vagy több azonos részének egymás után írásával (például *ababab* és *abcabc* ismétlő, de *ababa* és *aabb* nem). Bizonyítsuk be, hogy ha egy szóban bármely két szomszédos betűt megcserélve ismétlő szót kapunk, akkor a szó csupa azonos betűből áll. (Vegyük észre, hogy két azonos szomszédos betűt megcserélve a szó nem változik.)