



2019. április 9., kedd

**1. Feladat** Határozzuk meg az összes olyan  $(a, b, c)$  valós számhármast, amelyre  $ab + bc + ca = 1$  és

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

**2. Feladat** Legyen  $n$  pozitív egész. Egy  $2n \times 2n$ -es táblára dominókat helyezünk le úgy, hogy a tábla minden mezője pontosan egy dominóval fedett mezővel szomszédos. Határozzuk meg minden  $n$ -re az ilyen módon lerakható dominók számának lehető legnagyobb értékét!

(A *dominó* egy  $2 \times 1$ -es vagy  $1 \times 2$ -es téglalap. A dominókat úgy helyezük le a táblára, hogy minden dominó pontosan két mezőt foglaljon el a táblán, és ne legyenek átfedőek. Két mezőt *szomszédosnak* hívunk, ha különbözőek és van közös oldaluk.)

**3. Feladat** Legyen az  $ABC$  háromszögben  $CAB \sphericalangle > ABC \sphericalangle$  és jelöljük  $I$ -vel a háromszög beírt körének középpontját. Legyen  $D$  a  $BC$  szakasz azon pontja, amelyre  $CAD \sphericalangle = ABC \sphericalangle$ . Jelöljük az  $I$ -n átmenő,  $AC$ -t  $A$ -ban érintő kört  $\omega$ -val. Legyen az  $\omega$  és az  $ABC$  háromszög körülírt körének  $A$ -tól különböző metszéspontja  $X$ . Bizonyítsd be, hogy a  $DAB \sphericalangle$  és a  $CXB \sphericalangle$  szögek szögfelezői a  $BC$  egyenesen metszik egymást.