2009. július 15. (szerda)

1. Feladat Legyen n pozitív egész szám és legyenek $a_1, \dots, a_k$ ($k \geqslant 2$) olyan páronként különböző egész számok az $\{1, \dots, n\}$ halmazból, hogy az $i = 1, \dots, k-1$ értékek mindegyikére teljesül az, hogy n osztója $a_i(a_{i+1} - 1)$-nek. Bizonyítsuk be, hogy n nem osztója $a_k(a_1 - 1)$-nek.

2. Feladat Legyen az ABC háromszög körülírt körének középpontja O. Legyen P ill. Q a CA ill. AB oldal belső pontja. Legyenek K, L ill. M a BP, CQ ill. PQ szakaszok felezőpontjai, és legyen Γ a K, L, M pontokon áthaladó kör. Tegyük fel, hogy a PQ egyenes érintője a Γ körnek. Bizonyítsuk be, hogy $OP = OQ$.

3. Feladat Tegyük fel, hogy $s_1, s_2, s_3, \dots$ pozitív egész számoknak olyan szigorúan növekvő sorozata, amelyre az

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{és} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

részsorozatok mindegyike számtani sorozat. Bizonyítsuk be, hogy $s_1, s_2, s_3, \dots$ maga is számtani sorozat.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2009. július 16. (csütörtök)

4. Feladat Legyen az ABC háromszögben $AB = AC$. A $CAB\sphericalangle$ ill. $ABC\sphericalangle$ szögek szögfelezői a BC ill. CA oldalakat rendre a D ill. E pontokban metszik. Legyen K az ADC háromszög beírt körének a középpontja. Tegyük fel, hogy $BEK\sphericalangle = 45°$. Határozzuk meg a $CAB\sphericalangle$ szög összes lehetséges értékeit.

5. Feladat Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, ami a pozitív egész számok halmazát a pozitív egész számok halmazába képezi, és amire teljesül az, hogy tetszőleges pozitív egész a és b értékekre van olyan nem-elfajuló háromszög, amelynek oldalhosszai

$$a, \ f(b) \ \text{ és } \ f(b + f(a) - 1).$$

(Egy háromszög *nem-elfajuló*, ha csúcsai nincsenek egy egyenesen.)

6. Feladat Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ páronként különböző pozitív egész számok és legyen M egy olyan, pozitív egész számokból álló, $n-1$ elemű halmaz, ami nem tartalmazza az $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ számot. Egy szöcske a valós számegyenesen ugrál a 0 pontból kiindulva úgy, hogy n ugrást hajt végre jobbfelé, melyek hossza $a_1, a_2, \dots, a_n$ valamilyen sorrendben. Bizonyítsuk be, hogy a szöcske meg tudja választani az ugrások sorrendjét úgy, hogy ne ugorjon az M halmaz egyik elemére se.

Munkaidő: 4 és fél óra.
Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.