2011. július 18., hétfő

1. Feladat. Az $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ halmaz négy, páronként különböző pozitív egész számból áll. Az $a_1+a_2+a_3+a_4$ összeget jelöljük s_A-val, és jelölje n_A az olyan (i, j) párok $(1 \le i < j \le 4)$ számát, amelyekre $a_i + a_j$ osztója s_A-nak.

Határozzuk meg az összes olyan A halmazt, amelyre n_A a lehetséges maximális értékét veszi fel.

2. Feladat. Legyen $\mathcal{S}$ a sík pontjainak egy véges, legalább kételemű halmaza. Feltesszük, hogy az $\mathcal{S}$ halmaz semelyik három pontja sincs egy egyenesen.

Egy *szélmalom*nak nevezett folyamat során kiindulunk egy ℓ egyenesből, amely az $\mathcal{S}$ halmaznak pontosan egy P pontját tartalmazza. Az egyenes a P *forgástengely* körül az óramutató járásával megegyező irányban forog addig, amíg először nem találkozik egy másik, $\mathcal{S}$ halmazba tartozó ponttal. Ekkor ez a Q pont lesz az új forgástengely, és az egyenes a Q pont körül forog tovább az óramutató járásával megegyező irányban egészen addig, míg újra nem találkozik egy $\mathcal{S}$ halmazba tartozó ponttal. Ez a folyamat vég nélkül folytatódik.

Bizonyítsuk be, hogy megválaszthatjuk a $P \in \mathcal{S}$ pontot és a P-n átmenő ℓ egyenest úgy, hogy az $\mathcal{S}$ halmaz minden pontja végtelen sokszor legyen a szélmalom forgástengelye.

3. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyre teljesül az

$$f(x + y) \le yf(x) + f(f(x))$$

feltétel minden x, y valós számra. Bizonyítsuk be, hogy minden $x \le 0$ esetén teljesül $f(x) = 0$.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2011. július 19., kedd

4. Feladat. Legyen $n > 0$ egy egész szám. Van egy kétkarú mérlegünk és n súlyunk, amelyek súlya $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Ezt az n súlyt egymás után a mérlegre akarjuk helyezni oly módon, hogy a jobboldali serpenyő soha ne legyen nehezebb a baloldali serpenyőnél. Mindegyik lépésben kiválasztjuk az eddig a mérlegre nem tett súlyok valamelyikét, és a mérlegnek vagy a baloldali vagy a jobboldali serpenyőjébe helyezzük, egészen addig, amíg az összes súly fel nem kerül a mérlegre.

Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet ezt megtenni.

5. Feladat. Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ pedig a pozitív egész számok halmazát. Legyen f egy $\mathbb{Z}$-t $\mathbb{N}$-be képező függvény. Tegyük fel, hogy bármilyen két m és n egész szám esetén az $f(m) - f(n)$ különbség osztható $f(m - n)$-nel.

Bizonyítsuk be, hogy minden m, n egész számra teljesül az, hogy ha $f(m) \leq f(n)$, akkor $f(n)$ osztható $f(m)$-mel.

6. Feladat. Legyen ABC egy hegyesszögű háromszög, Γ a háromszög körülírt köre és ℓ Γ egy érintőegyenese. Jelölje ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c azokat az egyeneseket, amelyeket úgy kapunk, hogy ℓ-et a BC, CA ill. AB egyenesekre tükrözzük.

Bizonyítsuk be, hogy az ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c egyenesek által meghatározott háromszög körülírt köre érinti a Γ kört.

Munkaidő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.