2020. szeptember 21., hétfő

1. Feladat: Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. A P pont az $ABCD$ belsejében van. Fennállnak az alábbi, arányokra vonatkozó egyenlőségek:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egy ponton megy át: az $\angle ADP$ és a $\angle PCB$ szög belső szögfelezője és az AB szakasz felezőmerőlegese.

2. Feladat: Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a \geq b \geq c \geq d > 0$ és $a + b + c + d = 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

3. Feladat: Adott $4n$ kavics, amelyeknek a súlya rendre $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:

- A két kupac összsúlya azonos.
- Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.

Language: Hungarian

Munkaidő: négy és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.

2020. szeptember 22., kedd

4. Feladat: Adott egy $n > 1$ egész szám. Egy hegynek egy lejtőjén n^2 állomás van, csupa különböző magasságon. Két felvonótársaság, A és B mindegyike k felvonót üzemeltet; mindegyik felvonóval egy állomásról egy magasabban fekvő állomásra lehet eljutni (közbülső megállás nélkül). Az A társaság k felvonójának k különböző kezdőpontja és k különböző végpontja van, és magasabbról induló felvonó magasabbra is érkezik. Ugyanezek a feltételek teljesülnek B-re. Azt mondjuk, hogy egy felvonótársaság *összeköt* két állomást, ha a lejjebbi állomásról indulva el lehet jutni a feljebbire az adott társaság egy vagy több felvonóját használva (nincs megengedve semmilyen más mozgás az állomások között).

Határozzuk meg a legkisebb olyan pozitív egész k számot, amelyre biztosak lehetünk abban, hogy van két olyan állomás, amelyet mindkét felvonótársaság összeköt.

5. Feladat: Adott egy kártyapakli, amely $n > 1$ kártyából áll. Mindegyik kártyára egy pozitív egész szám van felírva. A pakli olyan, hogy bármely két kártyán lévő szám számtani közepe egyúttal a mértani közepe is néhány (egy vagy több) kártyán lévő számnak.

Milyen n-ekre következik ebből, hogy a kártyákon álló számok mind egyenlők?

6. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan c pozitív konstans, amellyel igaz a következő állítás:

Tekintsünk egy $n > 1$ egész számot és egy n pontból álló $\mathcal{S}$ halmazt a síkban úgy, hogy $\mathcal{S}$ bármely két különböző pontjának távolsága legalább 1. Ebből következik, hogy van olyan, $\mathcal{S}$-et szétválasztó ℓ egyenes, hogy $\mathcal{S}$ bármely pontjának ℓ-től való távolsága legalább $cn^{-1/3}$.

(Egy ℓ egyenes *szétválasztja* pontoknak egy $\mathcal{S}$ halmazát, ha valamely, $\mathcal{S}$-nek két pontját összekötő szakasz átmetszi ℓ-et.)

Megjegyzés. Gyengébb eredményre, amelyben $cn^{-1/3}$ helyett $cn^{-\alpha}$ áll, járhat részpontszám az $\alpha > 1/3$ konstans értékétől függően.

Munkaidő: négy és fél óra.
Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont adható.