Kiss Árpád Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmány

Bolyai János Matematikai Társulat

M

ÚTMUTATÓ
a 2002. évi ARANY DÁNIEL matematikai tanulóverseny értékeléséhez
KEZDŐK I-II. kategória
I. forduló

Minden megoldást lehetetlen előre látni. Helyhiány miatt amúgy sem térhetnénk ki minden lehetséges megoldás értékelésének részletezésére. Az itt következő megoldások sem a „legegyszerűbb”, sem a „mintamegoldás” megjelölésre nem tartanak igényt.

Teljes pontszám csak kifogástalanul indokolt állításokból levezetett megoldásokért jár. Ha a versenyző az itt közölt megoldásoktól eltérő úton indul el, a közölt részpontokkal arányos részpontok adhatók.

Minden egyes műveleti hibáért – ha a részletes útmutató mást nem ír elő – 1 pontot le kell vonni.

Egy feladatra legfeljebb két elvileg különböző megoldás kaphat pontot, a második megoldásra a teljes megoldásért kapható pontszám legfeljebb 50%-a adható.

A dolgozatokat javító Kollégákat arra kérjük, hogy a részben vagy egészben megoldott feladatok megoldásait jól áttekinthetően **egyenként pontozzák**, majd az Értékelő lapot gondosan kitöltve a dolgozathoz mellékelni szíveskedjenek. Minden, ezen túlmenő jellemzés vagy érdemjegy adása fölösleges.

A szakközépiskolai és a nem tagozatos gimnáziumi tanulók dolgozatait (**I. kategória**)
14 ponttól,
a speciális tantervű osztályokban tanulókét (**II. kategória**)
22 ponttól kérjük felküldeni.

2002. február a Versenybizottság

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 2001/2002. tanévben a szaktanárok által **kijavított dolgozatokat és a hozzátartozó értékelő lapokat közvetlenül a KÁOKSZI nevére és címére (1399 Bp. Pf.: 701/432) szíveskedjen beküldeni!**

A beérkezés határideje: 2002. március 4.

Kérjük, a borítékra is írja rá, hogy „Arany D. Matematika Verseny Kezdők”!

Munkáját előre is köszönjük!

A 2002. évi Arany Dániel matematikai tanulóverseny
(kezdők) I. forduló feladatmegoldásai

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{2x}{|x-3|-5}+\frac{1}{x+2}\geq 1$$ (6 pont)

Megoldás: $3\leq x$ esetén $\frac{2x}{x-8}+\frac{1}{x+2}\geq 1$, közös nevezőre hozva és 0-ra rendezve $\frac{x^2+11x+8}{(x-8)(x+2)}\geq 0$, azaz $\frac{(x+5{,}5)^2-22{,}25}{(x-8)(x+2)}\geq 0$. A számlálóval értelmezett másodfokú függvénynek x = -5,5-nél minimuma van, ezért ha $3\leq x$, akkor a függvény szigorúan monoton nő. $8{,}5^2-22{,}25>0$, tehát $3\leq x$ esetén a számláló pozitív. $3\leq x$ esetén a nevező akkor pozitív, ha $8<x$. Tehát $I_1=]8;\infty[$. (3 pont)

$x<3$ esetén $\frac{2x}{-x-2}+\frac{1}{x+2}\geq 1$, átalakítva $\frac{-3x-1}{x+2}\geq 0$. Ez akkor teljesül, ha $-3x-1\geq 0$ és $x+2>0$, vagy $-3x-1\leq 0$ és $x+2<0$. Ekkor $I_2=]-2;-\frac{1}{3}]$.

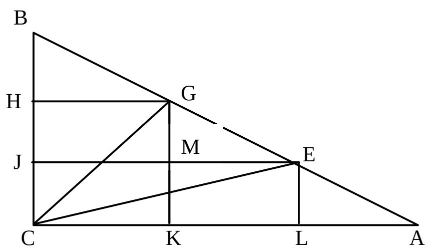
(2 pont)

Azonos átalakítások miatt az egyenlőtlenség megoldása: $I = I_1\cup I_2 =]-2;-\frac{1}{3}]\cup]8;\infty[$.

(1 pont)

2. Az ABC derékszögű háromszög 3 egység hosszúságú AB átfogójának harmadoló pontjai E és G. Számítsa ki a CE^2+CG^2 összeg pontos értékét! (6 pont)

Megoldás:



Az átfogó E és G harmadoló pontjain keresztül húzzunk párhuzamos egyeneseket a derékszögű háromszög befogóival. Ekkor BHG, GME és ELA háromszögek egybevágóak, mert AE = EG = GB és a rajta levő szögek egyállásúak, tehát egyenlőek. Legyen EL = x és CK = y. Ekkor: GK = 2x, CL = 2y, BC = 3x és AC = 3y.

(2 pont)

Az ABC derékszögű háromszögre: $9x^2+9y^2=AB^2$.

A CLE derékszögű háromszögre: $x^2+4y^2=CE^2$.

A CKG derékszögű háromszögre: $4x^2+y^2=CG^2$.

(2 pont)

Ekkor $CE^2+CG^2=5x^2+5y^2=\frac{5}{9}(9x^2+9y^2)$. Tehát $CE^2+CG^2=\frac{5}{9}AB^2=5$.

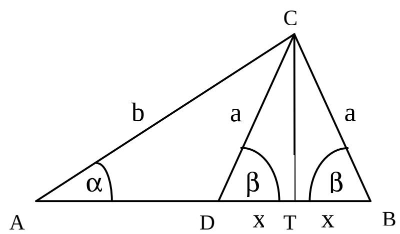
(2 pont)

3. Hány olyan 10^6 -nál kisebb természetes szám van, amely számjegyeinek összege páros és a rákövetkező természetes szám számjegyeinek összege is páros ? (8 pont)

   Megoldás: Ha a szám utolsó számjegye 9-nél kisebb és számjegyeinek összege páros, a rá-
   következő természetes szám számjegyeinek összege csak 1-gyel nő, így számjegyeinek összege páratlan. Tehát a természetes szám utolsó számjegye 9.
   Álljon az eredeti szám végén k db 9-es számjegy. Az eredeti számhoz 1-et hozzáadva az új
   szám végén k db 0 és előtte 1-gyel nagyobb számjegy áll, ezért a számjegyek összege (1-9k)-val változik. Ez akkor lesz páros, ha k páratlan. Az eredeti szám 10^6 -nál kisebb, ezért $k \le 5$. (3 pont)
   Ha k =5 az eredeti szám $A99999$ alakú. A számjegyek összege $45 + A$. Ez akkor páros, ha $A \in \{1;3;5;7\}$. Tehát négy ilyen szám van.
   Ha k = 3 az eredeti szám $ABC999$ alakú. A számjegyek összege $27 + A + B + C$. Ez akkor
   páros, ha $A + B + C$ páratlan. Ekkor $C \in \{0;1;2;...;8\}$, $B \in \{0;1;...;9\}$ és ha $B + C$ páros, akkor $A \in \{1;3;5;7;9\}$, ha pedig $B + C$ páratlan, akkor $A \in \{0;2;4;6;8\}$. Tehát
   $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$
   ilyen szám van.
   Ha k = 1 az eredeti szám $ABCDE9$ alakú. A számjegyek összege $9 + A + B + C + D + E$. Ez akkor páros, ha $A + B + C + D + E$ páratlan. Az előzőhöz hasonlóan E 9 féle, B; C; D 10 féle és ezektől függően A 5 féle szám lehet. Tehát $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45000$ ilyen szám van.
   Így a feladat kérdésére a válasz: 4 + 450 + 45000 = 45454 megfelelő szám van. (5 pont)

4. Egy hegyesszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel $ac = b^2 - a^2$. Bizonyítsa be, hogy $\beta = 2\alpha$! (10 pont)

   Bizonyítás:



   Tükrözzük B-t a c oldalhoz tartozó CT magasságra és B tükörképe legyen D! Az ABC háromszög hegyesszögű és $b^2 - a^2 = ac > 0$, ezért $b > a$, tehát D az AT szakasz belső pontja. Legyen BT = DT = x.

   Az ATC derékszögű háromszögben: AT = c – x, tehát $b^2 = (c - x)^2 + CT^2$.
   A CTB derékszögű háromszögben: $a^2 = x^2 + CT^2$.
   A két egyenletet kivonva egymásból: $b^2 - a^2 = c^2 - 2cx$.
   Tehát, $ac = b^2 - a^2 = c(c - 2x)$, ezért a = c – 2x = AD. Így az ADC háromszögben AD = DC = a . Az ADC egyenlőszárú háromszög külső szöge β, ezért $\beta = 2\alpha$.
   Ezzel az állítást beláttuk.
   Pontozás: A teljes megoldásért 10 pont jár.

5. Mely m és n 1-nél nagyobb egész számokra teljesül, hogy m osztója n-nek és $m^n \le n^m$?
(10 pont)

Megoldás: Legyen $a \ge 1$ és $b \ge 2$ egész, ekkor:
$(1+a)^b = (1+a)(1+a)\cdot ... \cdot(1+a) \ge 1+ba+a^b > 1+ba$.
Ha $a=1$, akkor $2^b > 1+b$. A feladatban m osztója n-nek, ezért $n = km$ alakú, ahol k pozitív egész (és $n; m \ge 2)$, a másik feltétel szerint $m^{km} \le (km)^m$.
Ha $k=1$, $n = m \ge 2$ mindig megoldás.
Ha $\mathrm{k;n;m} \ge 2$: megmutatjuk, hogy ekkor sem k , sem m nem lehet 2-nél nagyobb.
Legyen $m \ge 3$ és $k \ge 2$, akkor ($k-1 \ge 2$ vagy $k-1=1$ -et nézve)
$\mathrm{m^{k-1} \ge 3^{k-1} > 2^{k-1} \ge 1+(k-1) = k}$.
Ha $m \ge 2$ és $k \ge 3$, akkor ($k-1 \ge 2$ miatt) $m^{k-1} \ge 2^{k-1} > 1+(k-1) = k$.
Mindkét esetben teljesül, hogy $m^{k-1} > k$, így $m^{mk-m} > k^m$, ezért $m^{mk} > (mk)^m$.
Ez a feladat feltétele miatt nem lehetséges. Eszerint ha $k \ge 2$, valóban csak $m = k = 2$, $n = 4$ lehetséges és $2^{2\cdot 2} = (2\cdot 2)^2$, tehát ez megfelel a feladat feltételének.
A megoldások tehát { $n = m \ge 2$ tetszőleges egész } $\cup$ { n = 4; m = 2} .
Pontozás: A teljes megoldásért 10 pont jár.