1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $\left\{\frac{1}{2}x\right\} = \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}$, ahol $\{z\}$a z valós szám törtrészét jelenti!

Mo: Mivel a törtrész $[0;1)$-ban van, ezért $0 \le \frac{1}{16}x + \frac{1}{32} < 1$, ebből $-0{,}5 \le x < 15{,}5$.
Másrészt $\left\{\frac{1}{2}x\right\} = \frac{1}{2}x - \left[\frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{2}x - k$, ahol *k* egész szám. Így $\frac{1}{2}x - k = \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}$,
amiből $x = \frac{32k+1}{14}$, ahol $-0{,}5 \le x < 15{,}5$ miatt k egész lehet 0;1;2;3;4;5;6.

2. Melyek azok az (x;y) egész számokból álló számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség: $5x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 4y = 5$?

Mo: Az egyenletet az $(x-y)^2 + (2x+1)^2 + (y-2)^2 = 10 = 0 + 1 + 9$ alakban írhatjuk fel.
Mivel $(2x+1)^2$ páratlan pozitív egész, ezért 1 vagy 9 lehet. Ha $(2x+1)^2 = 1$, akkor x=0, vagy x=-1. Az x=0-ból nem lesz megfelelő y. Az x=-1-ből y lehet -1, vagy 2 behelyettesítés után. Hasonló módon kapjuk a $(2x+1)^2 = 9$-ből, hogy x=1 vagy -2, de utóbbi értékből nem lesz megoldás. Az x=1-ből pedig y lehet 1 vagy 2.

3. Az ABC háromszög területe t, beírt körének sugara r. Az A csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_a, a B csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_b, a C csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_c. A beírt kör és a másik három kör közös belső érintője egy-egy kis háromszöget vág le az ABC háromszögből, amelyek területe rendre t_a, t_b, t_c. Igazolja, hogy $\frac{t_a}{r_a}+\frac{t_b}{r_b}+\frac{t_c}{r_c}=\frac{t}{r}$!

Mo: A rajzból: AS=AE=s_a; BE=BJ=s_b; CJ=CS=s_c. Amiből $2s_a+2s_b+2s_c=K$, ha mindkét oldalt osztjuk kettővel, akkor $s_a+s_b+s_c=s$, amiből következik az állítás.