

### Adh1-3m 0304

1. Adott egy derékszögű trapéz  $a$  hosszú alapja, amelyen hegyesszög is van. A másik alapnak és a trapéz magasságának összege  $b$ , ahol  $a < b$ . Bizonyítsuk be, hogy ha a trapéz területe maximális, akkor a hegyesszögre illeszkedő szár hossza nagyobb  $a\sqrt{2}$ -nél.

Mo: Legyen a trapéz magassága  $x$ . Így a rövidebb alap  $b-x$ . A terület  $x$ -nek másodfokú függvénye, melynek  $x=(a+b)/2$  helyen van maximuma. Ekkor Pitagorasz tételét alkalmazva a trapéz levágott sarkára a szár négyzete:

$$c^2 = \frac{1}{2}(5a^2 + b^2 - 2ab) = 2a^2 + \frac{(a-b)^2}{2}, \text{ amiből } c \geq \sqrt{2}a.$$

2. Az  $x$  valós számra teljesül, hogy  $x^4 + ax^3 + (2-12a^2)x^2 + ax + 1 = 0$ , ahol az  $a$  paraméter értéke egész szám. Bizonyítsuk be, hogy az  $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3}$  hányados értéke egész szám.

Mo: Reciprokegyenlet. Osztjuk  $x^2$ -tel:  $x^2 + \frac{1}{x^2} + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 - 12a^2 = 0$ . Bevezetve

$$y = x + \frac{1}{x}, \text{ így } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y. \text{ Az egyenlet } y\text{-ra másodfokú lesz,}$$

amelynek gyökei  $3a$ , és  $-4a$ , egészek. Tehát  $\frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3} = y^3 - 3y + y = y^3 - 2y$  egész, hiszen  $y$  is egész.

3. Legfeljebb hány egész szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő összege, semelyik kettő különbsége és semelyik kettő szorzata se legyen osztható 2004-gyel?

Mo: Ha semelyik kettő különbsége nem lehet osztható 2004-gyel, akkor nem lehetnek ugyanabban a maradékosztályban, így legfeljebb 2004 db szám adható meg (0,1,2,...,2003 maradékosztályok). Ha semelyik kettő összege sem lehet osztható 2004-gyel, akkor (1;2003); (2;2002);...;(1001;1003) párokból is az egyik kiesik, így legfeljebb 2004-1001=1003 db szám adható meg. Ha semelyik kettő szorzata sem osztható 2004(=2<sup>2</sup> · 3 · 167) -gyel, akkor a legkevesebb számot akkor vesszük ki, ha a 167-tel osztható számok kerülnek ki és így a szorzat biztosan nem lehet osztható 2004-gyel. A 167-tel osztható számokból 7 van (0,167,334, 501, 668, 835, 1002; vagy a középső 5 helyett a 2004-167, 2004-334, 2004-501, 2004-668, 2004-635). Tehát legfeljebb 1003-7=996 db szám adható meg, és ez a fentiek szerint meg is valósul.