1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet: $x = 14\{x\} + 3$, ahol $\{x\} = x - [x]$ és $[x]$ az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobb.

Mo: Mivel a törtrész a $[0;1)$-ban van, ezért x a $[3;17)$ eleme. Egyértelműen létezik olyan k egész, hogy $k \le x < k+1$, ezzel $\{x\} = x - k$, így az egyenletből $x = k + \frac{k-3}{13}$ adódik, ahova k=3, 4,…,15,16 számokat behelyettesítve kapjuk a 3; $4 + \frac{1}{13}$;…;$15 + \frac{12}{13}$ értékeket. A k=16-ra nem kapunk megoldást.

2. Mely x,y és z egész számokra igaz az $x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2004}$ egyenlőség?

Mo: Az x,y,z mind párosak, vagy ketten páratlanok.
Ha kettő páratlan lenne, akkor négyzeteik 4-es maradéka 1, tehát a baloldal 4-es maradéka 2, de a jobboldal 4-gyel osztható, így ez nem lehet.
Ha mind párosak, akkor 4-gyel osztva az $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4^{1001}$ egyenletet kapjuk. A gondolatmenet ismétlésével az egyszerűsítés addig folytatható, amíg a $x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 1$ marad. Ennek az egyenletnek csak az a megoldása, hogy két szám a 0, a 3. pedig az 1, vagy a -1. Így x,y,z közül kettő mindig 0, a harmadik 2^{1002}, vagy -2^{1002}.

3. Legyen az ABCD egységnyi oldalú négyzet BC, illetve CD oldalának egy-egy belső pontja P, illetve Q. Bizonyítsa be, hogy ha az APQ háromszög tompaszögű, akkor $PQ < 5\sqrt{2} - 6$.

Mo: Az APQ Δ-ben A-nál nem lehet tompaszög. Legyen Q-nál. Így $AP^2 > PQ^2 + AQ^2$
Ha CP=x, CQ=y, akkor $0 > y^2 - y + x$, azaz $\frac{1}{4} - x > \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$, tehát szükséges, hogy $x \le \frac{1}{4}$. Mivel PQ adott, rögzített x esetén akkor maximális, ha y is az. Az egyenletből

$-\sqrt{\frac{1}{4}-x}<y-\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{1}{4}-x}$, azaz adott x esetén $y_{\max}<\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x}$. Ekkor

$PQ^2=x^2+y_{\max}^2<x^2-x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x}<x^2-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

Mivel $0\le x\le\frac{1}{4}$, így x-0-nál lesz PQ^2 maximális, így PQ<1<$5\sqrt{2}-6$.