Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
első (iskolai) forduló
haladók – I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sakkversenyen mindenki mindenkivel egyszer játszik. Ha a résztvevők csak feleannyian lennének, akkor az eredetileg lejátszandó játszmák 24%-ára kerülne csak sor. Hány versenyző indult eredetileg a versenyen?

Megoldás. Ha a résztvevők száma eredetileg n, akkor $\dfrac{n(n-1)}{2}$ játszmára kerülne sor. 2 pont

Ha csak $\dfrac{n}{2}$ versenyző lenne, akkor a játszmák száma $\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{n}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{n}{2}-1\right)$. 2 pont

A feltétel alapján $\dfrac{24}{100}\cdot\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n}{2}\cdot\left(\dfrac{n}{2}-1\right)$, 1 pont
azaz $\dfrac{3}{25}\cdot n\cdot(n-1)=\dfrac{1}{8}\cdot n\cdot(n-2)$.

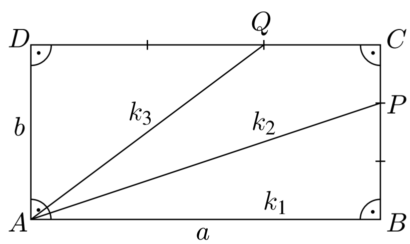
Mivel $n\neq 0$, ezért $24(n-1)=25(n-2)$, 1 pont
ahonnan $n=26$ adódik.

Eredetileg tehát 26 játékos indult a versenyen. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ téglalap BC és CD oldalának a C csúcshoz közelebbi harmadolópontjai P, illetve Q. Az AP és AQ szakasszal három olyan részre osztottuk a téglalapot, amelyek közül kettőnek megegyezik a kerülete. Mekkora lehet ekkor a téglalap szomszédos oldalainak aránya?

Megoldás.



Tekintsük az ábrát.

Legyen $AB=a$, $BC=b$, ahol $a\geqq b$.
Pitagorasz tétele alapján az ABP háromszögből
$AP=\sqrt{a^2+\dfrac{4}{9}b^2}$, 1 pont

az ADQ háromszögből pedig $AQ=\sqrt{\dfrac{4}{9}a^2+b^2}$. 1 pont

Az ABP háromszög kerületét k_1-gyel, az $APCQ$ négyszög kerületét k_2-vel, az AQD háromszög kerületét k_3-mal jelölve a következő esetek lehetségesek:

(I.) $k_1 = k_2$, azaz $a + \frac{2}{3}\,b + AP = AP + \frac{1}{3}\,b + \frac{a}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}\,a^2 + b^2}$.

Rendezéssel $\frac{2a+b}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}\,a^2 + b^2}$ adódik, ahonnan 1 pont

négyzetre emeléssel $\frac{4}{9}\,a^2 + \frac{4ab}{9} + \frac{b^2}{9} = \frac{4}{9}\,a^2 + b^2$ alapján az $a = 2b$ összefüggés adódik. Ebben az esetben tehát $\frac{a}{b} = 2$, illetve $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. 1 pont

(II.) $k_1 = k_3$. Ekkor

$$a + \frac{2}{3}\,b + \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}\,b^2} = \frac{2a}{3} + b + \sqrt{\frac{4}{9}\,a^2 + b^2},$$

így $\frac{a-b}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}\,a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}\,b^2}$. 1 pont

Az $a \geqq b$ feltétel miatt a bal oldal: $\frac{a-b}{3} \geqq 0$, míg a jobb oldali különbség kisebb vagy egyenlő 0-nál, hiszen $\frac{4}{9}\,a^2 + b^2 \leqq a^2 + \frac{4}{9}\,b^2$.

Ezért csak $a = b$ lehetséges.

Ekkor pedig $\frac{a}{b} = 1$, azaz a téglalap négyzet. 1 pont

(III.) $k_2 = k_3$. Ekkor

$$\sqrt{a^2 + \frac{4}{9}\,b^2} + \frac{1}{3}\,b + \frac{1}{3}\,a + AQ = AQ + \frac{2}{3}\,a + b,$$

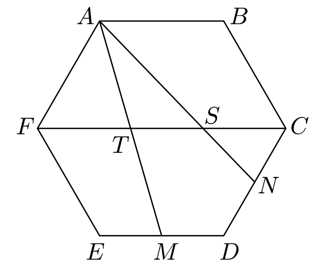
ahonnan $\sqrt{a^2 + \frac{4}{9}\,b^2} = \frac{a+2b}{3}$ adódik.

Négyzetre emeléssel az $a^2 + \frac{4}{9}\,b^2 = \frac{a^2}{9} + \frac{4ab}{9} + \frac{4}{9}\,b^2$ alak alapján $\frac{8}{9}\,a^2 = \frac{4ab}{9}$, azaz $b = 2a$, ami az $a \geqq b$ feltétel miatt lehetetlen. 1 pont

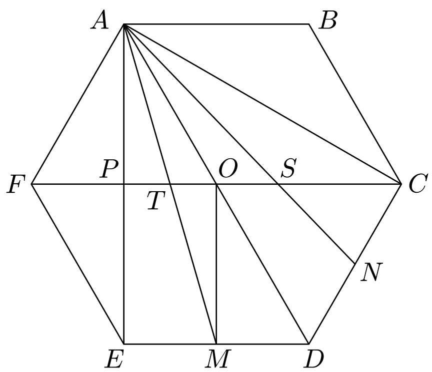
Tehát $a \geqq b$ esetén az $\frac{a}{b}$ arány értéke 2 vagy 1 lehet.

Összesen: 7 pont

3. Az ábrán látható szabályos hatszög ED és DC oldalainak M, illetve N a felezőpontja. Milyen arányban osztják az FC átlót a T és S pontok?



Megoldás.



Húzzuk be a hatszög A-ból induló átlóit! AE és FC metszéspontja legyen P, AD és FC metszéspontja legyen O.

O a hatszög középpontja, így felezi AD-t és FC-t is. 1 pont

ADC háromszögnek OC és NA két súlyvonala, ezért S súlypont, tehát harmadolja OC-t. 1 pont

Tehát S harmadolja FC-t. 1 pont

Húzzuk be OM-et is, ami párhuzamos és egyenlő AP-vel.

$APT\triangle$ egybevágó tehát MOT-vel (egy oldaluk és szögeik megegyeznek). 1 pont

Tehát T felezi PO-t. 1 pont

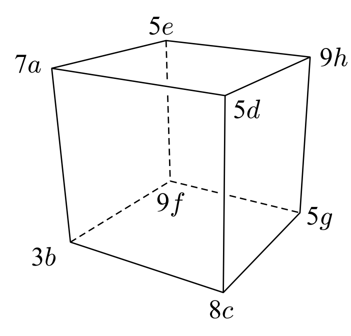
AOF szabályos háromszögben AP magasságvonal, tehát P felezi OF-et. 1 pont

T tehát negyedeli OF-et, így FC-t 3 : 5 arányban osztja (vagy másképpen fogalmazva a 3. nyolcadolópont). 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés. A helyes eredményekért indoklás nélkül is jár az 1–1 pont, de több még akkor sem, ha pontos szerkesztésről olvasta le az eredményt.

4. Egy kocka minden csúcsát két természetes számmal jelöltük meg, amelyek közül egyet egy betűvel eltakartunk. Így az egyik szám látható, a másik nem. Bármely csúcsnál lévő látható szám a csúccsal élszomszédos három, betűvel takart szám átlaga. Milyen számokat rejtenek a betűk?



Megoldás. Jelöljük a csúcsokat az abban a csúcsban takart betűvel. Az A csúccsal szomszédos csúcsok az E, D és B. Ezekre felírva a feltételt:

A: $\dfrac{e+d+b}{3} = 7$, azaz $e+d+b = 21$.

Hasonlóan a többi csúcsra:
B: $a + f + c = 9$,
C: $b + d + g = 24$,
D: $a + h + c = 15$,
E: $a + f + h = 15$,
F: $e + b + g = 27$,
G: $h + f + c = 15$,
H: $e + d + g = 27$. 1 pont

Az E és D egyenletekből $f = c$.
A D és G egyenletekből $a = f$.
A H és F egyenletekből $b = d$. 1 pont

A B egyenletből és az előzőek miatt $a = f = c = 3$.
A G egyenletbe $f = c = 3$-at helyettesítve $h = 9$-et kapunk. 1 pont

Az A és C egyenletből $d = b$-t behelyettesítve kapjuk, hogy $e+2b = 21$, illetve $g+2b = 24$.
A két egyenletet egymásból kivonva $g = e + 3$ adódik. 1 pont

Ezt behelyettesítve a H egyenletbe:

$$\begin{aligned} e + b + 3 + e &= 27, \\ 2e + b &= 24. \end{aligned}$$

A C egyenletbe $b = d$-t és $g = e + 3$-at helyettesítve:

$$\begin{aligned} 2b + 3 + e &= 24, \\ 2e + b &= 2b + 3 + e, \\ e &= b + 3. \end{aligned}$$ 1 pont

Ezt behelyettesítve az A egyenletbe:

$$\begin{aligned} (b + 3) + b + b &= 21, \\ b &= 6. \end{aligned}$$ 1 pont

Azaz $a = c = f = 3$, $b = d = 6$, $e = h = 9$, $g = 12$. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy gazda madárijesztő helyett hangágyúkkal próbálja távol tartani a madarakat földjétől. A hangágyún beállítható (egész másodpercekben) egy t riasztási idő, és minden t másodperc elteltével dördül egy nagyot. A t idő 60 és 90 másodperc közé esik.

A gazda különböző időre állította be két hangágyúját, hogy véletlenszerűnek tűnjön a dördülések ritmusa. Az első ágyú délelőtt 9 előtt 4 másodperccel szólalt meg, a másik pedig pontosan kilenckor. Később 10 óra után 4 másodperccel és 10 óra után 8 másodperccel is hallatszott egy-egy dördülés. Még később, valamikor 10 óra 10 perc és 10 óra 20 perc között a két eszköz pontosan egyszerre riasztott.

Határozzuk meg másodpercre pontosan, mikor dördültek el egyszerre a hangágyúk 10 óra 10 perc és 10 óra 20 perc között!

Megoldás. Jelölje a két hangágyún beállított riasztási időt (másodpercben) t_1 és t_2. Két eset lehetséges:

1. eset		
	1. ágyú	2. ágyú
1. dördülés	8 ó 59 p 56 mp	9 ó 0 p 0 mp
2. dördülés	10 ó 0 p 4 mp	10 ó 0 p 8 mp
eltelt idő	3608 mp	3608 mp

2. eset		
	1. ágyú	2. ágyú
1. dördülés	8 ó 59 p 56 mp	9 ó 0 p 0 mp
2. dördülés	10 ó 0 p 8 mp	10 ó 0 p 4 mp
eltelt idő	3612 mp	3604 mp

1 pont

A riasztási idő osztója bármely két dördülés között eltelt időnek. (Továbbra is másodpercben számolva.)

A prímfelbontások alapján megkeressük a 60 és 90 közé eső osztókat.

$$3608 = 2^3 \cdot 11 \cdot 41, \quad 3604 = 2^2 \cdot 17 \cdot 53, \quad 3612 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43.$$ 1 pont

Ebből t_1 és t_2 lehetséges értékei:

1. eset	
t_1	t_2
82 mp	88 mp
88 mp	82 mp

2. eset	
t_1	t_2
84 mp	68 mp
86 mp	68 mp

2 pont

Végül a 10 órát tekintve a 0 időpillanatnak megnézzük, hogy melyik esetben kapunk 10 óra 10 perc (= 600 mp) és 10 óra 20 perc (= 1200 mp) között egybeeső dördüléseket.
a) $600 \leqq 4 + 82k = 8 + 88n \leqq 1200$.
b) $600 \leqq 4 + 88k = 8 + 82n \leqq 1200$.
c) $600 \leqq 8 + 84k = 4 + 68n \leqq 1200$.
d) $600 \leqq 8 + 86k = 4 + 68n \leqq 1200$.

Az a) esetben $8 \leqq k \leqq 14$ és $7 \leqq n \leqq 13$, mert csak ekkor esnek a megengedett intervallumba a dördülések. Az egyenlet egyszerűsítve: $41k - 2 = 44n$. Tehát $11 \mid 41k - 2$. A 41 maradéka 11-gyel osztva 8, tehát $8k$-nak 2 maradékot kell adnia 11-gyel osztva, ez pedig csak $k = 14$-re teljesül a fenti intervallumban.

A $k = 14$ értékre $n = 13$, és $4 + 82k = 8 + 88n = 1152$ mp, ami 19 perc 12 másodperc.

Tehát a hangágyúk 10 óra 19 perc 12 másodperckor szólhattak egyszerre. 2 pont

A b), c) és d) esetekben hasonlóan számolva nem kapunk a megadott intervallumba eső megoldást. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A megoldás akkor is teljes értékű, ha a versenyző nem vizsgál osztási maradékokat, hanem végigszámolja az egyenlőtlenségek lehetséges megoldásait, és így találja meg az egyetlen egybeesést. Ha a dolgozat csupán az első esetet elemzi, és így jut el a helyes végeredményhez, akkor 5 pontot ér a megoldás.