Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Mennyi lesz a $\left(\left(\left(\ldots\left(7^7\right)^7\right)^7\right)^7\ldots\right)^7$ kifejezés utolsó jegye, ha 2006-szor végeztük el a 7. hatványra emelést?

1. megoldás. $\left(\left(\left(\ldots\left(7^7\right)^7\right)^7\right)^7\ldots\right)^7 = 7^{7\cdot 7\cdot 7\cdot\ldots\cdot 7} = 7^{7^{2006}}$ 1 pont

Vizsgáljuk meg 7 hatványainak utolsó számjegyét:

$$\begin{aligned} 7^1 &= 7 \\ 7^2 &= \ldots 9 \\ 7^3 &= \ldots 3 \\ 7^4 &= \ldots 1 \\ 7^5 &= \ldots 7 \\ 7^6 &= \ldots 9 \\ 7^7 &= \ldots 3 \\ 7^8 &= \ldots 1. \end{aligned}$$

2 pont

A 7, 9, 3, 1 számjegyek 4-es periódusban ismétlődnek. Ahhoz, hogy megtudjuk, hogy a négy lehetséges végződés közül melyik az utolsó számjegy, meg kell állapítani a kitevő négyes maradékát. 1 pont

A 7 néggyel osztva (-1) maradékot ad.

(-1) 2006. hatványának néggyel vett osztási maradéka 1. 2 pont

Tehát a kifejezés utolsó jegye 7. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. A 7 hatványait vizsgálva 7^7 utolsó számjegye 3:

$$\begin{aligned} 7^1 &= 7 \\ 7^2 &= \dots 9 \\ 7^3 &= \dots 3 \\ 7^4 &= \dots 1 \\ 7^5 &= \dots 7 \\ 7^6 &= \dots 9 \\ 7^7 &= \dots 3 \\ 7^8 &= \dots 1. \end{aligned}$$

2 pont

A 7^7-t hatványozva a $(7^7)^7$ utolsó számjegye megegyezik a 3^7 utolsó számjegyével, azaz 7-tel:

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \\ 3^2 &= 9 \\ 3^3 &= \dots 7 \\ 3^4 &= \dots 1 \\ 3^5 &= \dots 3 \\ 3^6 &= \dots 9 \\ 3^7 &= \dots 7. \end{aligned}$$

2 pont

Ha a 7-et páratlan sokszor emeljük a hetedik hatványra 3-at, ha páros sokszor végezzük el a hatványozást, akkor 7-et kapunk. 2 pont

Mivel 2006 páros szám, ezért a 2006 hatványozás végeredményeképpen az utolsó számjegy 7 lesz. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Adjuk meg azokat a természetes számokból álló $(x; y)$ számpárokat, melyre teljesül, hogy

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 2x + 84.$$

Megoldás. Alakítsuk teljes négyzetek összegévé a kifejezést:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x &= 84, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + x^2 - 2xy &= 85, \\ (x-1)^2 + (y-x)^2 &= 85. \end{aligned}$$

3 pont

85-öt kétféleképpen tudjuk két négyzetszám összegére felbontani:

$$\begin{aligned} 85 &= 81 + 4, \\ 85 &= 36 + 49. \end{aligned}$$

Ha $(x-1)^2 = 81$ és $(y-x)^2 = 4$, akkor $x-1 = \pm 9$.

$x = 10$, mert x természetes szám, illetve $y - x = \pm 2$ miatt $y = 10$, illetve $y = 8$. 1 pont

Ha $(x-1)^2 = 4$ és $(y-x)^2 = 81$, akkor $x-1 = \pm 2$.

$x = 3$, mert x természetes szám, illetve $y - x = \pm 9$ miatt $y = 12$, mert y is csak természetes szám lehet. 1 pont

Ha $(x-1)^2 = 36$ és $(y-x)^2 = 49$, akkor $x-1 = \pm 6$.

$x = 7$, mert x természetes szám, illetve $y - x = \pm 7$ miatt $y = 0$, illetve $y = 14$. 1 pont

Ha $(x-1)^2 = 49$ és $(y-x)^2 = 36$, akkor $x-1 = \pm 7$.

$x = 8$, mert x természetes szám, illetve $y - x = \pm 6$ miatt $y = 14$ illetve $y = 2$. 1 pont

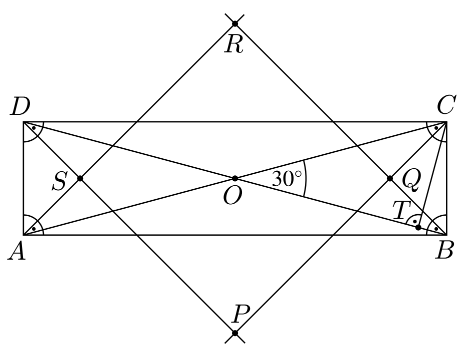
Tehát a keresett számpárok:

x	10	10	3	7	7	8	8
y	12	8	12	0	14	14	2

Összesen: 7 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglalap átlói által bezárt kisebbik szög $30°$, akkor a téglalap belső szögfelezői által közrefogott négyszög területe megegyezik a téglalap területével.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



$AB = a,\ BC = b,\ CT = m.$

Az OTC derékszögű háromszögből a $CT = m$ magasság $\dfrac{OC}{2}$.

Az ABC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján $AC = 2 \cdot OC = \sqrt{a^2 + b^2}$, így $m = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}$. 1 pont

A $PQRS$ négyszög négyzet. Ennek igazolásáért: 1 pont

A $PQRS$ négyzet oldala $\dfrac{AB}{\sqrt{2}} - \dfrac{AD}{\sqrt{2}} = RS$ alapján $\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}$. 1 pont

A négyzet területe így $\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{a^2 - 2ab + b^2}{2}$. 1 pont

A téglalap területe: $AB \cdot BC = DB \cdot CT$, azaz

$$ab = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{4}, \quad \text{tehát} \quad a^2+b^2 = 4ab.$$ 2 pont

Mivel a négyzet területe $\frac{a^2-2ab+b^2}{2}$, ezért $a^2+b^2=4ab$ alapján a terület

$$\frac{4ab-2ab}{2} = ab,$$

ami pedig éppen az $ABCD$ téglalap területe. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. A Tour de Hongrie kerékpáros körverseny távja 777 km. A szervezők, hogy megkönnyítsék a versenyzők dolgát, valamennyi résztvevőnek egy olyan kijelzőt adtak, amelyen kilométerenként felvillan a már megtett és a még hátralévő távolság. Azaz az indulás pillanatában $(000; 777)$, a célba érkezéskor $(777; 000)$, közben például $(097; 680)$ látható a kijelzőn.

Hány esetben fordul elő, hogy a kijelzőn felvillanó számsorban pontosan kétféle számjegy található?

Megoldás. A két szám utolsó jegyei különbözők, hiszen összegük páratlan számot (777) kell, hogy adjon. A feltétel szerint csak ez a két szám léphet fel mindkét távolságadatban. 1 pont

A számok összeadásakor nem léphet fel tízes átvitel, mert ez csak akkor fordulhatna elő, ha az egyik számjegy 8, a másik pedig 9, és ekkor a háromjegyű távolságadatok 8-cal vagy 9-cel kezdődnének, ami lehetetlen. 2 pont

Eszerint minden helyiértéken külön-külön 7-et kell adni a számjegyek összegének, méghozzá úgy, hogy az egyik számban az egyik, a másik számban a másik számjegy áll az adott helyiértéken. 1 pont

A feltételnek megfelelő esetekben az első helyiértéken található egyik számjegy a $0, 1, \ldots, 7$ számjegyek bármelyike lehet, ez a másik számjegyet már egyértelműen meghatározza. A maradék két helyiértéken is ennek a két számjegynek kell állnia, de a sorrendjük mindkét helyen kétféle lehet 1 pont

Így $8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ esetben villannak fel a feltételnek megfelelő számok a kijelzőn. 2 pont

---

Összesen: 7 pont