Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy pozitív egész számot 4-gyel osztva 3, és 9-cel osztva 5 a maradék. Mennyi a maradék, ha a számot 36-tal elosztjuk? (6 pont)

Megoldás. Írjuk fel a számot $n = 36k + r$ alakban, ahol $0 \leqq r < 36$. 1 pont

Mivel a 36 többszöröse a 4-nek és a 9-nek is, $r = 4m + 3 = 9s + 5$, ahol $0 \leqq m < 9$ és $0 \leqq s < 4$. 3 pont

$4m + 3$ páratlan szám, így a vele egyenlő $9s + 5$ is páratlan, ezért s páros.

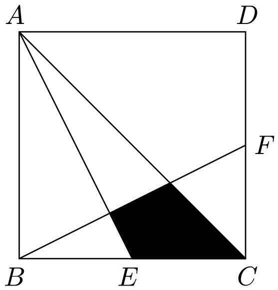
$s = 0$ nem lehet, mert az 5 néggyel osztva 1 maradékot ad, tehát $s = 2$.

Így a kérdezett maradék $r = 23$. 2 pont

2. Hány olyan legfeljebb 5 jegyű, 5-tel nem osztható természetes szám van, amelynek minden jegye prím? (6 pont)

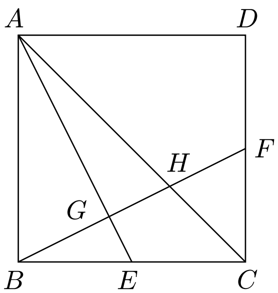
Megoldás. Ha a szám 5-tel nem osztható, akkor az utolsó helyen nem állhat 5-tel osztható számjegy. Mivel minden jegye prím, ezért az utolsó helyen 2,3 vagy 7 állhat. A többi helyen 2, 3, 5 vagy 7 szerepelhet. 2 pont

Egyjegyű	3 db	1 pont
Kétjegyű	$3 \cdot 4 =$ 12 db	
Háromjegyű	$3 \cdot 4 \cdot 4 =$ 48 db	
Négyjegyű	$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ 192 db	
Ötjegyű	$3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$ 768 db	2 pont
Összesen:	1023 db.	1 pont



3. Az $ABCD$ négyzet oldalainak hossza 30 cm. A BC oldal felezőpontja E, a CD oldal felezőpontja F. Számítsa ki a besötétített rész területét! (6 pont)

Megoldás. Messe BF-et AE a G, AC a H pontban!



Az ABE és BCF háromszögek egybevágóak ($AB = BC$, $BE = CF$ és $ABE\sphericalangle = BCF\sphericalangle = 90°$), így $AEB\sphericalangle + FBC\sphericalangle = AEB\sphericalangle + BAE\sphericalangle = 90°$.

Tehát az ABE, AGB és BGE derékszögű háromszögek hasonlóak. Mivel $AB = 2BE$, azért $AG = 2BG$.

Így $t_{ABG} = 4t_{BEG}$. Mivel $t_{ABE} = \dfrac{30 \cdot 15}{2}$ cm^2 = 225 cm^2, és $t_{ABE} = t_{ABG} + t_{BEG}$, $t_{BEG} = 45$ cm^2. 3 pont

Az ABH és CFH háromszögek hasonlóak ($AB \parallel CF$ miatt a megfelelő szögek egyenlőek) és $AB = 2CF$. Így a CFH háromszög CF-hez tartozó magassága a BC harmadrésze, vagyis 10 cm. Ezért $t_{CFH} = \dfrac{15 \cdot 10}{2}$ cm^2 = 75 cm^2. 2 pont

Másrészt $t_{BCF} = t_{ABE} = 225$ cm^2. Tehát a kérdezett terület:

$$t_{CHGE} = t_{BCF} - t_{BEG} - t_{CFH} = 225 \text{ cm}^2 - 45 \text{ cm}^2 - 75 \text{ cm}^2 = 105 \text{ cm}^2.$$ 1 pont

Megjegyzés: A hasonlóságokra való hivatkozás középvonalak behúzásával könnyen elkerülhető.

4. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza: befogói a és b, átfogója c. Az átfogójához tartozó magasság hossza m. Igazolja, hogy: $c + m > a + b$. (6 pont)

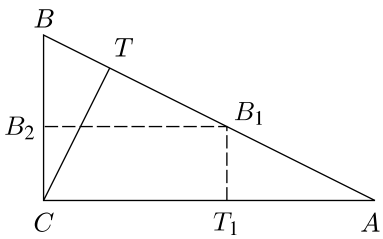
1. megoldás. $2c \cdot m = 2ab$, mert mindkét oldal a háromszög területének négyszerese. 2 pont

A bal oldalhoz c^2-et, a jobb oldalhoz a Pitagorasz tétel miatt a vele egyenlő $(a^2 + b^2)$-et hozzáadva a $c^2 + 2cm = a^2 + b^2 + 2ab$ egyenlőséget kapjuk. 2 pont

Mivel $m > 0$, ebből következik, hogy: $(c + m)^2 > c^2 + 2cm = (a + b)^2$.

Így a feladat állítását kaptuk, hiszen $c + m > 0$ és $a + b > 0$. 2 pont

2. megoldás.



Legyen a C-ből induló magasság talppontja T és másoljuk át a BCT háromszöget az A csúcshoz és messe a B_1-en átmenő és az AC-vel párhuzamos egyenes a BC-t a B_2-ben. Ekkor:

$$BB_1 = AB - AB_1 = AB - BC = c - a.$$

$$B_1B_2 = T_1C = AC - AT_1 = AC - CT = b - m.$$

A B_1BB_2 derékszögű háromszögben az átfogó nagyobb, mint a befogók, tehát:

$$c - a > b - m, \quad \text{azaz} \quad c + m > a + b.$$ 6 pont