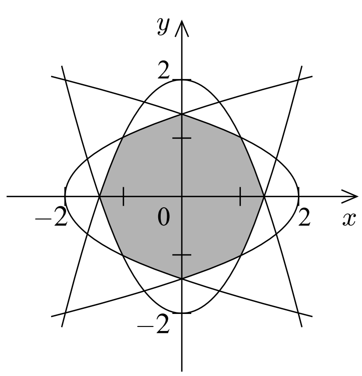
Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Ábrázolja azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát a síkon, amelyekre: $|y| \leqq 2 - x^2$ és $|x| \leqq 2 - y^2$ is teljesül! Igazolja, hogy e ponthalmaz területe több, mint 9 területegység!

Megoldás.

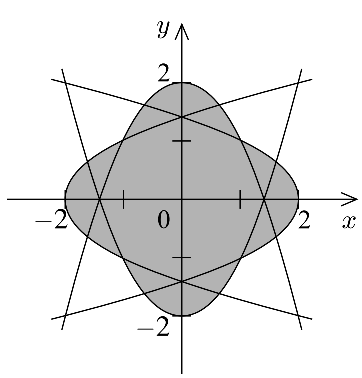


Ábrázolva az $y = 2 - x^2$, $y = x^2 - 2$, $x = 2 - y^2$, $x = y^2 - 2$ parabolákat, a keresett ponthalmazt az ábrán besötétített rész adja meg. Mivel ez belefoglalható egy $2 \cdot \sqrt{2}$ oldalhosszú négyzetbe, azért a területe kisebb, mint 8 területegység, tehát a feladat erre vonatkozó állítása nem igaz.

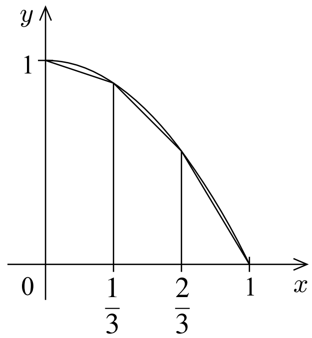
Megjegyzés: A feladat szövegezésében elírás történt. A kitűzők szándéka a következő volt.

1. Ábrázolja azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát a síkon, amelyekre: $|y| \leqq 2 - x^2$ vagy $|x| \leqq 2 - y^2$ teljesül! Igazolja, hogy e ponthalmaz területe több, mint 9 területegység!

Megoldás.



Ábrázolva az $y = 2 - x^2$, $y = x^2 - 2$, $x = 2 - y^2$, $x = y^2 - 2$ parabolákat, a keresett ponthalmazt az ábrán besötétített rész adja meg. A terület egy 2×2-es négyzetből és nyolc egybevágó parabolaív által határolt idomból tevődik össze. A nyolc egybevágó idom közül egynek a területe megegyezik az $f(x) = 1 - x^2$ által határolt tartomány első síknegyedbe eső részének a területével. Ezt a területet alulról közelítjük két trapéz és egy háromszög területével.



$$\frac{1+\frac{8}{9}}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\frac{8}{9}+\frac{5}{9}}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}}{2}=\frac{35}{54}.$$

Így az egész terület legalább:

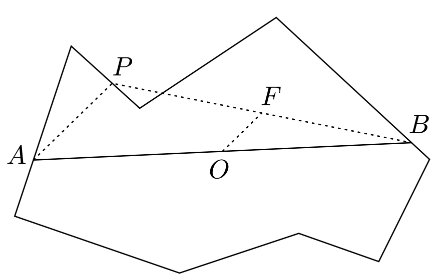
$$4+8\cdot\frac{35}{54}=\frac{496}{54}>9 \text{ (területegység).}$$

2. Egy négyzetrácsot 11 vízszintes és 11 függőleges vonal határoz meg. A vonalak metszéspontjai közül kijelölünk 20 pontot és bármelyik kettőt szakasszal kötünk össze. Mutassa meg, hogy e szakaszok között van négy azonos hosszúságú!

Megoldás. A négyzetrács összesen $11\cdot 11=121$ metszésponttal rendelkezik. A kijelölt 20 pont összesen $(20\cdot 19)/2=190$ szakaszt határoz meg. Vegyük sorra, hogy milyen szakaszok fordulhatnak elő ebben a négyzetrácsban. Egy szakasz x- és y-irányú vetülete is 0-tól 10 egység hosszú lehet. Úgy tekinthetünk egy szakaszt, mint egy olyan (esetleg elfajult) derékszögű háromszög átfogóját, amelynek befogói ezek az x-, illetve y-irányú vetületek. Ilyen derékszögű háromszögből egybevágóság erejéig $(12\cdot 11)/2=66$ különböző lehetséges. Nem mindnek lesz különböző hosszú az átfogója: $3^2+4^2=0^2+5^2$, $7^2+4^2=1^2+8^2$, $6^2+8^2=0^2+10^2$. Ezért legfeljebb $66-3=63$ különböző átfogó-hossz van. Mivel $190/63>3$, azért biztosan lesz négy azonos hosszúságú szakasz.

3. Egy síkbeli zárt töröttvonal hossza 1 egység. Igazolja, hogy a töröttvonal által határolt tartomány lefedhető egy $\frac{1}{4}$ egység sugarú körrel!

Megoldás.



Legyen A és B a zárt töröttvonal két olyan pontja, melyek felezik a kerületét és legyen O az AB szakasz felezőpontja! Ekkor $AB\leqq\frac{1}{2}$, mert az AB szakasz hossza legfeljebb akkora, mint a végpontjait összekötő töröttvonal hossza. Legyen P a töröttvonal egy tetszőleges pontja! $AP+PB\leqq\frac{1}{2}$, mert AP legfeljebb akkora, mint az A-t és P-t összekötő és PB legfeljebb akkora, mint a P-t és B-t összekötő töröttvonal hossza és az A-t a B-vel összekötő töröttvonal hossza $\frac{1}{2}$. Legyen a PB felezőpontja F! OF az ABP (esetleg elfajuló) háromszög AP-vel párhuzamos középvonala, tehát $OF=\frac{1}{2}AP$. Így:

$$OP\leqq OF+PF=\frac{1}{2}AP+\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}(AP+PB)\leqq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

ami azt jelenti, hogy a töröttvonal kerületének tetszőleges pontja és így az általa meghatározott tartomány is lefedhető az O középpontú, $\frac{1}{4}$ sugarú körrel.