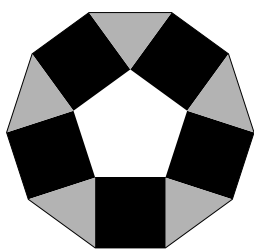


Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
I. forduló
kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató



1. Az ábrán látható alakzatot öt egybevágó egyenlőszárú háromszögből és öt egybevágó négyzetből állítottuk össze. A tíz alakzat közül bármely kettőnek legfeljebb a határpontjai között lehetnek azonosak. Határozza meg az egyenlő szárú háromszögek belső szögeinek nagyságát!

(6 pont)

Megoldás. Mivel az ötszög minden oldala egyenlő a négyzetek oldalaival, így az ötszög minden oldala egyenlő.

1 pont

Az ötszög szögei is egyenlők, mert mindegyik csúcsnál a 360° -ból elveszünk 2-szer 90° -ot és az egyenlőszárú háromszög szárszögét, hiszen ezt a szöget két egyenlő hosszúságú oldal zárja közre.

2 pont

Ezért az ötszög szabályos. A szabályos ötszög egy belső szöge 108° .

1 pont

Így a háromszög szárszöge $360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - 108^\circ = 72^\circ$.

1 pont

Az alapon fekvő szögeinek nagysága: $(180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ$.

1 pont

		51
21	42	

2. Egy bővös négyzetben minden sorban, oszlopban és átlóban a számok összege ugyanannyi. Határozza meg az alábbi bővös négyzetből hiányzó hat számot!

(6 pont)

Megoldás. Vezessük be az ábrán látható jelöléseket!

b	a	51
	c	
21	42	d

A 2. oszlop összege egyenlő a mellékátló összegével:

$$a + c + 42 = 72 + c, \quad \text{tehát} \quad a = 30.$$

1 pont

Az 1. sor összege egyenlő a mellékátló összegével:

$$b + 30 + 51 = 72 + c, \quad \text{tehát} \quad b = c - 9.$$

1 pont

A 3. sor összege egyenlő a mellékátló összegével:

$$63 + d = 72 + c, \quad \text{tehát} \quad d = c + 9. \quad 1 \text{ pont}$$

A főátló összege egyenlő a mellékátló összegével: $(c - 9) + c + (c + 9) = 72 + c$, tehát $c = 36$. 1 pont

Ezután a kitöltés egyértelmű és nyilvánvaló. A kapott négyzet:

27	30	51
60	36	12
21	42	45

1 pont

Ez bűvös négyzet és megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

3. Egy országban 9 nagyváros van. Ezek közül mindegyikből pontosan 4 nagyvárosba van oda és vissza is repülőjárat. Bizonyítsa be, hogy bármely nagyvárosból legfeljebb egy átszállással bármely nagyvárosba el lehet jutni! (6 pont)

Megoldás. Tekintsünk két tetszőleges nagyvárost! Ha ezek között van közvetlen repülőjárat, akkor az egyikből a másikba átszállás nélkül el lehet jutni. Ha nincs közöttük közvetlen repülőjárat és nincs olyan nagyváros, amelyből mindkettőbe közvetlenül el lehet jutni, akkor rajtuk kívül nem 7, hanem legalább 8 nagyvárosnak kéne lennie, hiszen mindkettőből pontosan négy nagyvárosba indul közvetlen repülőjárat. Tehát, ha két nagyváros között nincs közvetlen repülőjárat, akkor egy átszállással el lehet jutni egyikből a másikba. 6 pont

4. A $3, 6, 12, 5, 10, \dots$ számsorozat elemeit a második elemtől kezdve úgy kaptuk, hogy az előző elem egyes helyiértéken álló számjegyének kétszeresét hozzáadtuk ahhoz a számhoz amit ennek a számjegynek az elhagyásával kaptunk. Mi lesz a sorozat 2007-dik eleme? (6 pont)

Megoldás. A sorozat első 19 eleme:

$$3, 6, 12, 5, 10, 1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3. \quad 2 \text{ pont}$$

Ezért ez egy periodikus sorozat és a periódusa 18. 2 pont

2007-ben a 18 megvan 111-szer és a maradék 9, ezért a sorozat 2007-dik eleme ugyanakkora, mint a 9-dik eleme, vagyis 8. 2 pont