Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy matematika órán a tanár felírt egy pozitív egész számot a táblára. Az egyik diák így szólt: a szám osztható 31-gyel. A második diák azt mondta, hogy a szám osztható 30-cal, a harmadik pedig azt, hogy a szám osztható 29-cel. Ezt a felsorolást addig folytatták a diákok, amíg a harmincadik is megszólalt: a szám osztható 2-vel. A tanár ezek után közölte, hogy a fenti harminc állítás közül csak kettő hamis és a két hamis állítás közvetlenül egymás után hangzott el. Melyik volt a két hamis állítás?

Megoldás. Legyen a két szám közül, amellyel a felírt szám nem osztható a kisebbik n $(2 \leqq n \leqq 30)$. Ekkor a felírt szám nem lehet $(2n)$-nel osztható. Mivel $n \geqq 2$ esetén n és $2n$ nem lehetnek szomszédosak, $2n$ nem lehet a felsorolt osztók között, ezért $2n > 31$, vagyis $n > 15$. Ezért a felírt szám osztható minden 16-nál kisebb számmal. Tehát osztható a 16-nál kisebb páratlan számok 2-szeresével, 4-szeresével és 8-szorosával is. Így n nem lehet 16-nál nagyobb páros szám. Ugyanezért nem lehet páratlan sem, mert ekkor a felírt szám az $n+1$ páros számmal nem lenne osztható. Tehát a szám 16-tal és 17-tel nem osztható.

Ilyen szám létezik. Pl. $7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$.

2. Néhány egész szám összege 0. Bizonyítsa be, hogy a számok ötödik hatványainak összege osztható 15-tel!

Megoldás. Legyen k egész szám!

$$k^5 - k = k(k^4-1) = k(k^2+1)(k^2-1) = (k-1)k(k+1)(k^2-4+5) =$$
$$= (k-2)(k-1)k(k+1)(k+2) + 5(k-1)k(k+1).$$

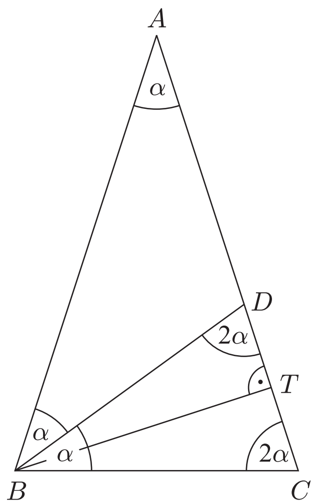
Öt egymást követő egész szám osztható 3-mal és 5-tel is. Három egymást követő egész szám 5-szöröse is osztható 3-mal és 5-tel is. A 3 és 5 relatív prímek, tehát k^5-k osztható 15-tel. Legyen $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Ekkor:

$$x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5 = x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= (x_1^5 - x_1) + (x_2^5 - x_2) + \ldots + (x_n^5 - x_n).$$

A felírtakból következik a feladat állítása.

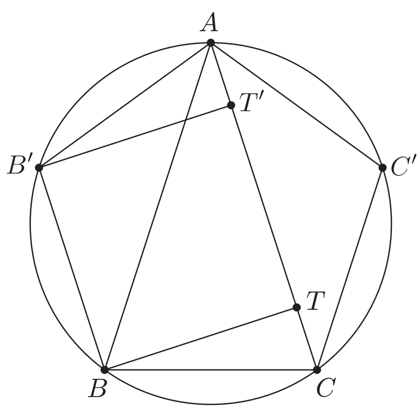
3. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Legyen a B pontnak az AC oldalra vett merőleges vetülete T! Mekkorák a háromszög szögei, ha $AC - 2 \cdot CT = BC$?

1. megoldás.



A BT egyenesre tükrözve C képe D. Ekkor $BD = BC$, mert a két szakasz egymás tükörképe és a feladat feltétele szerint $AD = BC$, tehát $AD = BD$, így az ABD háromszög egyenlő szárú. Jelöljük ennek alapon fekvő szögeit α-val! A külsőszög tétel szerint $BDC\sphericalangle = 2\alpha$ és ugyanekkora ennek BT-re vonatkozó tükörképe $ACB\sphericalangle$ és az ABC háromszög másik alapon fekvő szöge is. Az ABC háromszög szögössszege $5\alpha = 180^\circ$, ahonnan $\alpha = 36^\circ$, azaz a háromszög szögei $BAC\sphericalangle = 36^\circ$ és $BCA\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 72^\circ$.

2. megoldás.



A CT távolságot A-tól rámérve az AC oldalra kapjuk a T' pontot ($AC = 2 \cdot CT + BC > 2 \cdot CT$). A B, T és T' pontokat B'-vel a $BTT'B'$ téglalappá kiegészítve az AC oldalfelező merőlegesére való szimmetria miatt B' rajta van ABC körülírt körén. Mivel a háromszög egyenlőszárú, ugyanez igaz B'-nek az A-ból induló magasságvonal egyenesére vett C' tükörképére is. Az A-ból induló magasságvonal egyenesére vett szimmetria miatt $BB' = CC'$ és $AB' = AC'$. A feltétel miatt

$$BB' = TT' = AC - 2 \cdot CT = BC.$$

A BCT és $B'T'A$ derékszögű háromszögek egybevágósága miatt $BC = B'A$.

Tehát – a szimmetriákat is figyelembe véve – azt kaptuk, hogy $AB'BCC'$ egy szabályos ötszög, melynek középpontja a háromszög körülírt körének középpontja. Ebből már következik, hogy a háromszög szögei 36°, 72°, 72° nagyságúak.