Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Feladatok

1. Tetszőleges számú 2 egység és 5 egység oldalú négyzetlapunk van. Ki lehet-e közülük 2009 darabot választani úgy, hogy belőlük hézagmentesen és átfedés nélkül négyzetet lehessen kirakni?

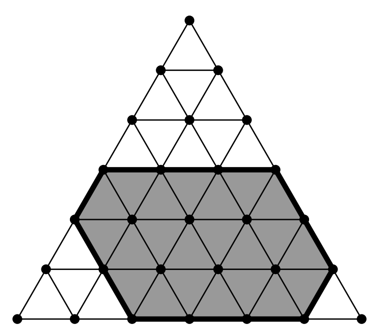
2. Legyenek a és b 2-nél nagyobb valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$9a + 8b - 6ab < 10.$$

3. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre az F, D, E pontokban érinti. Az AFE, BDF és CED háromszögek beírt körének középpontja rendre A_1, B_1 és C_1.

Bizonyítsuk be, hogy A_1, B_1 és C_1 rajta vannak az ABC beírt körén!

4. Egy szabályos háromszög oldalának hossza legyen kettőnél nagyobb természetes szám. A szabályos háromszög – az ábrán látható módon – felbontható egységoldalú szabályos háromszögekre. Az eredeti háromszög csúcsainál egy-egy egész oldalhosszúságú szabályos háromszöget levágva olyan hatszöget kapunk, amelynek oldalai egész hosszúságúak, szögei pedig egyenlők. Nevezzük egy ilyen hatszög *méretének* az őt alkotó egységoldalú szabályos háromszögek számát. (Az ábrán látható hatszög mérete ezek szerint 22.)



a) Hány különböző – nem egybevágó – hatszög készíthető a fenti módszerrel, ha az eredeti háromszög oldalainak hossza 6 egység?

b) Mekkora az a legkisebb egész oldalhosszúságú szabályos háromszög, amiből kivágható 2009 *méretű* hatszög?